কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃক বাংলা এবং আসামের উচ্চ ইংরেজি
বিদ্যালয়-সমূহের ৭ম — ১০ম শ্রেণীর পাঠ্যরূপে অনুমোদিত
(২৫-১১-৩৭ তারিখের কলিকাতা গেজেট দ্রষ্টব্য)

প্রবেশিকা জ্যামিতি

[কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের নব প্রবর্তিত বিধানানুযায়ী
ম্যাট্রিকুলেশন পরীক্ষার্থীদের জন্য]

(প্রথম—চতুর্থ খণ্ড)

ম্যাট্রিকুলেশন "পাটীগণিত" প্রণেতা
শ্রীসোমেশ চন্দ্র বসু
প্রণীত

বসু ব্রাদার্স
১৩।১ কলেজ স্কোয়ার
কলিকাতা

মূল্য দেড় টাকা

প্রকাশক—
এস্. সি. বসু
২০ সারপেন্টাইন লেন
কলিকাতা

প্রথম সংস্করণ—১৯৩৭
দ্বিতীয় সংস্করণ—১৯৩৮
ততীয় সংস্করণ—১৯৩৮

প্রিণ্টার—শ্রীনির্ম্মলচন্দ্র সেন
সখা প্রেস
৩৪ মুসলমানপাড়া লেন
কলিকাতা

ভূমিকা

বাণীর বরপুত্র স্যার আশুতোষ মুখোপাধ্যায় বাংলা ভাষাকে শিক্ষার বাহন করিবার জন্য আপ্রাণ চেষ্টা করিয়া গিয়াছেন। আজ তাঁহার সুযোগ্য পুত্র, কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের ভাইস্ চ্যান্সেলর, শ্রীযুত শ্যামাপ্রসাদ মুখোপাধ্যায় সেই চেষ্টাকে ফলবতী করিয়াছেন।

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয় সম্প্রতি বাংলা ভাষার সাহায্যে পঠিতব্য বিষয় শিক্ষাদানের যে ব্যবস্থা অবলম্বন করিয়াছেন এবং পুস্তকাদি প্রণয়নের জন্য যে বানান-পদ্ধতি স্থির করিয়াছেন তাহাই অনুসরণ করিয়া নূতন সিলেবাস অনুযায়ী এই পুস্তকখানি সপ্তম হইতে দশম শ্রেণীর ছাত্রদের জন্য লিখিত হইল। জ্যামিতিতে নূতন উদ্ভাবনের ক্ষেত্র নাই বলিলেই চলে। ইউক্লিডের অনুসরণ করিয়া এবং দেশী ও বিদেশী বহু পুস্তকের সাহায্য লইয়া পুস্তকখানি লিখিত হইল। অনুশীলনী কতক স্বরচিত, কতক গৃহীত, এবং বিশেষ যত্ন সহকারে নির্বাচিত। যাহাদের জন্য ইহা লিখিত হইয়াছে, তাহাদের নিকট ইহা সুপাঠ্য হইলে শ্রম সার্থক জ্ঞান করিব।

বন্ধুবর শ্রীযুত রামলাল বন্দ্যোপাধ্যায় এম-এ ও বন্ধুবর শ্রীযুত সুধীরেন্দ্রনাথ বসু এম-এ মহোদয়গণ আমাকে পুস্তক প্রণয়ন বিষয়ে নানা ভাবে যথেষ্ট সাহায্য করিয়াছেন। তজ্জন্য তাঁহাদের নিকট আমি বিশেষ ভাবে কৃতজ্ঞ।

পুস্তকের ভ্রম সংশোধনে ও উহার উন্নতিকল্পে উপদেশ সাদরে গৃহীত হইবে।

কলিকাতা
১৭ই বৈশাখ, ১৩৪৪

গ্রন্থকার

সূচীপত্র

বিষয় — পৃষ্ঠা

তৃতীয় খণ্ড

চতুর্থ খণ্ড

জ্যামিতিক পরিভাষা

A

acute angle সূক্ষ্ম কোণ
acute-angled সূক্ষ্মকোণী
adjacent সন্নিহিত
alternate একান্তর
alternative proof বিকল্প প্রমাণ
altitude উচ্চতা, উন্নতি
ambiguous case দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র
analysis বিশ্লেষণ
angle কোণ
angle in a segment বৃত্তাংশস্থ কোণ
angle of a sector বৃত্তকলার কোণ
approximate value আসন্ন মান
arc চাপ
area ক্ষেত্রফল
arm বাহু, ভুজ
axiom স্বতঃসিদ্ধ
axis অক্ষ
axis of projection অভিক্ষেপাক্ষ
axis of symmetry প্রতিসাম্য অক্ষ

B

base ভূমি
bisection সমদ্বিখণ্ডন, দ্বিখণ্ডন
bisector সমদ্বিখণ্ডক, দ্বিখণ্ডক
boundary সীমা

C

centre কেন্দ্র
centre of gravity ভারকেন্দ্র
centre of inversion বিলোম কেন্দ্র
centre of similitude সাম্যকেন্দ্র
centroid ভরকেন্দ্র
chord জ্যা
chord of contact স্পর্শ-জ্যা
circle বৃত্ত
circum-centre পরিকেন্দ্র
circumference পরিধি
circumscribed পরিলিখিত
circumscribed circle, circum-circle পরিবৃত্ত
circum-radius পরিব্যাসার্ধ
co-axial সমাক্ষ
coincidence সমাপতন
collinear (points) একরেখীয়
common tangent সাধারণ স্পর্শক
complementary (angle) পূরক
concave প্রবৃদ্ধকোণী
concentric এককেন্দ্রীয়
conclusion সিদ্ধান্ত
concurrent সমবিন্দু
concyclic সমবৃত্ত
congruent সর্বসম

conjugate অনুবন্ধী, প্রতিযোগী
constant ধ্রুব
construction অঙ্কন
contact স্পর্শ
converse বিপরীত
converse proposition বিপরীত প্রতিজ্ঞা
convex প্রবৃদ্ধকোণহীন
corollary অনুসিদ্ধান্ত
corresponding (angle) অনুরূপ
curved line, curve বক্র রেখা
curved surface বক্রতল

D

data উপাত্ত
decagon দশভুজ
deduction সিদ্ধান্ত
degree অংশ, ডিগ্রী
diagonal কর্ণ
diameter ব্যাস
difference অন্তর
dimension মাত্রা
direct proof অন্বয়ী প্রমাণ
derect common tangent সরল সাধারণ স্পর্শক
direction দিক্
distance দূরত্ব
divided externally বহির্বিভক্ত
divided internally অন্তর্বিভক্ত
dodecagon দ্বাদশভুজ

E

enunciation নির্বচন
equiangular সদৃশকোণ
equidistant সমদূরবর্তী
equilateral সমবাহু
escribed বহির্লিখিত
escribed circle, ex-circle বহিঃবৃত্ত, বহির্বৃত্ত
ex-centre বহিঃকেন্দ্র
exercise অনুশীলনী
ex-radius বহির্ব্যাসার্ধ
exterior angle বহিঃকোণ
external বহিঃস্থ
external bisector বহির্দ্বিখণ্ডক
external contact বহিঃস্পর্শ

F

figure চিত্র
flat ruler চ্যাপ্টা মাপনী
foot (of the perpendicular) পাদ-বিন্দু
formula সূত্র

G

general enunciation সাধারণ নির্বচন
graph লেখ
graphical লৈখিক

H

height উচ্চতা, উন্নতি
heptagon সপ্তভুজ

hexagon ষড়্ভুজ
hypotenuse অতিভুজ
hypothesis কল্পনা
hypothetical construction কাল্পনিক অঙ্কন

I

identical একরূপ
identically equal সর্বতোভাবে সমান, সর্বসম
image প্রতিবিম্ব
in-centre অন্তঃকেন্দ্র
included angle অন্তর্ভূ'ত কোণ
indirect proof ব্যতিরেকী প্রমাণ
in-radius অন্তর্ব্যাসার্ধ
inscribed অন্তর্লিখিত
inscribed circle, in-circle অন্তর্বৃ'ত্ত
interior angle অন্তঃকোণ
interior opposite angle বিপরীত অন্তঃকোণ
internal অন্তঃস্থ
internal bisector অন্তর্দ্বিখণ্ডক
internal contact অন্তঃস্পর্শ
intersection ছেদ, প্রতিচ্ছেদ
inverse বিপরীত, ব্যস্ত
inversely similar ব্যস্ত অনুরূপ
inverse point বিলোম বিন্দু
inversion বিলোম ক্রিয়া
irregular বিষম
isosceles সমদ্বিবাহু

limit সীমা
limiting point পরিণাম বিন্দু
limiting position পরিণাম অবস্থান
line রেখা
locus সঞ্চারপথ

M

magnitude মান, পরিমাণ
major arc অধিচাপ
maximum বৃহত্তম
measure সংখ্যামান
measurement মাপন, চাপ
medial section মাধ্যমিক ছেদ
median মধ্যমা
middle point মধ্যবিন্দু
minimum ক্ষুদ্রতম
minor arc উপচাপ
minute মিনিট, কলা

N

negative ঋণাত্মক
nine-point cnetre নব-বিন্দু কেন্দ্র
nine-point cricle নব-বিন্দু বৃত্ত
nonagon নবভুজ
normal অভিলম্ব
note দ্রষ্টব্য

O

oblique তির্যক্
oblibue projection তির্যক্ অভিক্ষেপ
obtuse ang.e স্থূল কোণ
obtuse-angled স্থূলকোণী

octagon অষ্টভুজ
opposite বিপরীত
orthocentre লম্ববিন্দু
orthogonal সমকোণীয়
orthogonal projection লম্ব অভিক্ষেপ

P

parallel সমান্তরাল
parallelogram সামান্তরিক
particular enunciation বিশেষ নির্বচন
pedal line পাদরেখা
pedal triangle পাদ-ত্রিভুজ
pentagon পঞ্চভুজ
perimeter পরিসীমা
perpendicular লম্ব
perpendicular bisector লম্ব দ্বিখণ্ডক
plane, plane surface সমতল
plane geometry সামতলিক জ্যামিতি
point বিন্দু
point of concurrence সম্পাতবিন্দু
point of contact স্পর্শবিন্দু
point of intersection ছেদবিন্দু
point of medial section মাধ্যমিক ছেদবিন্দু
polar মেরুরেখা
pole মেরু
polygon বহুভুজ
position অবস্থান, অবস্থিতি
positive ধনাত্মক
postulate স্বীকার্য
practical ব্যবহারিক, ফলিত
problem সম্পাদ্য, প্রশ্ন
projected অভিক্ষিপ্ত
projection অভিক্ষেপ
proof প্রমাণ
proof by exhaustion নিঃশেষ প্রক্রিয়া
property ধর্ম
proportional সামানুপাতিক
proposition প্রতিজ্ঞা
protractor চাঁদা, কোণচক্র
proved প্রমাণিত

Q

quadrilateral চতুর্ভুজ
quæsita করণীয়
quindecagon পঞ্চদশভুজ

R

radical axis মূলাক্ষ
radical centre মূলকেন্দ্র
radius ব্যাসার্ধ, অর
radius of inversion বিলোম ব্যাসার্ধ
reciprocal (figure) অন্যোন্যক
rectangle আয়তক্ষেত্র, আয়ত
rectilineal figure ঋজুরেখ ক্ষেত্র
reflex·angle প্রবৃদ্ধ কোণ

regular সুষম
rhombus রম্বস্
right angle সমকোণ
right-angled সমকোণী
rough approximation স্থূল মান

S

scale, ruler মাপনী
scalene triangle বিষমবাহু ত্রিভুজ
secant ছেদক
second সেকেণ্ড, বিকলা
sector of a circle বৃত্তকলা
segment (of a circle) বৃত্তাংশ
segment of a line খণ্ড, অংশ
self-conjugate স্বানুবদ্ধ
self-evident স্বতঃ প্রমাণ
semi-circle অর্ধবৃত্ত
set-square মাটাম, ত্রিকোণী
side ভুজ, বাহু
similar (triangle) সদৃশ
similar segment সদৃশ বৃত্তাংশ
similarity সাদৃশ্য
similitude সাম্য
size আয়তন
solid ঘন, ঘনবস্তু
solution সমাধান
space স্থান, দেশ
square বর্গক্ষেত্র
straight সরল
straight angle সরল কোণ
subtended angle সম্মুখ কোণ
superposition উপরিপাতন
supplementary সম্পূরক
surface পৃষ্ঠ, তল
symmetry প্রতিসাম্য
symmetrical প্রতিসম
symmetrically opposite প্রতিসমরূপে বিপরীত
synthesis সংশ্লেষণ

T

tangent স্পর্শক
theorem উপপাদ্য
theoretical তত্ত্বীয়, বাদীয়
thickness বেধ
transversal ভেদক
trapezium ট্রাপিজিয়ম
triangle ত্রিভুজ, ত্রিকোণ
triangulation ত্রিভুজে বিভক্তকরণ
trisection সমত্রিখণ্ডন
transverse common tangent তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক

U

undecagon একাদশভুজ
unit একক

V

variable চল
vertex শীর্ষবিন্দু, শীর্ষ
vertical angle শিরঃকোণ
vertically opposite angle বিপ্রতীপ কোণ
volume ঘনফল

প্রবেশিকা জ্যামিতি

জ্যামিতির পুরাতত্ত্ব

কোন্ দেশে প্রথম জ্যামিতি শাস্ত্র আবিষ্কৃত হয় তাহা নির্দিষ্টরূপে জানিবার কোন উপায় নাই। তবে ইহা নিশ্চিত যে ভূমি পরিমাণ প্রণালী হইতে ইহার উদ্ভব হইয়াছে। ইহার ব্যুৎপত্তিগত অর্থ হইতেই ইহা বুঝা যায়।*

প্রাচীন ভারতবর্ষে বৈদিক যাগযজ্ঞ করিবার জন্য নানা আকারের বেদী এবং অঙ্কনাদি করিতে হইত। ইহা হইতেই জ্যামিতি শাস্ত্রের উদ্ভব হইয়াছে। বৌধায়ন শুল্ভ স্থত্র জ্যামিতি শাস্ত্র সম্বন্ধীয় একখানি অতি প্রাচীন গ্রন্থ। ইহাতে জ্যামিতির বহু তত্ত্ব আলোচিত হইয়াছে। একটি ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র যে, অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের যোগফলের সমান, তাহা বৌধায়নকার জ্ঞাত ছিলেন। পরে ব্রহ্মগুপ্ত, ভাস্করাচার্য প্রভৃতি পণ্ডিতগণ জ্যামিতি শাস্ত্র বিষয়ে বহু মৌলিক

* জ্যামিতি = জ্যা + মিতি ; জ্যা অর্থাৎ পৃথিবী বা ভূমি, এবং মিতি অর্থাৎ পরিমাণ করিবার বা মাপিবার প্রণালী। ইংরেজি Geometry কথাটি গ্রীক্ Geometron শব্দ হইতে উৎপন্ন ; Geo (earth) অর্থাৎ পৃথিবী বা ভূমি, এবং metron (measure) অর্থাৎ পরিমাণ করা।

গবেষণা করেন। ব্রহ্মগুপ্ত তাঁহার গ্রন্থে পরিমিতির বিষয় বিশেষ গবেষণা করেন। তিনটি বাহুর পরিমাণ দেওয়া থাকিলে একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় প্রণালী তিনি আবিষ্কার করিয়াছিলেন। বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত তিনি ৩'১৬ : ১ বাহির করিয়াছিলেন। পাশ্চাত্য দেশীয় পণ্ডিতগণ ইহা দ্বাদশ শতাব্দীর পূর্বে জানিতেন না। ভাস্করাচার্য রেখাগণিত নামক একখানি জ্যামিতি শাস্ত্র বিষয়ক গ্রন্থ রচনা করিয়াছিলেন। তাহাতে তিনি বৃত্তের পরিধি এবং ব্যাসের সূক্ষ্ম অনুপাত ৩'১৪১৬ : ১ আবিষ্কাব করিতে সমর্থ হইয়াছিলেন।

অতি প্রাচীনকালে চীনা পণ্ডিতগণ জ্যামিতির প্রাথমিক সূত্রগুলি অবগত ছিলেন, এরূপ প্রমাণ পাওয়া যায়। তাঁহারা ত্রিভুজের ধর্ম ও পরিমিতির কিয়দংশ পরিজ্ঞাত ছিলেন।

ইউরোপীয় পণ্ডিতদের মতে প্রাচীন মিশর ও ব্যাবিলন হইতে এই শাস্ত্রের উদ্ভব হইয়াছে। নীল নদের প্লাবনে পার্শ্বস্থ ভূমি প্লাবিত হওয়ায় ভূমির সীমারেখা বিলুপ্ত হইয়া যাইত। পরে জল শুকাইয়া গেলে পরিমাপ করিয়া জমি ভাগ করিয়া লইবার প্রয়োজন হইত। এইরূপে তথায় জ্যামিতি শাস্ত্রের তত্ত্বগুলি আবিষ্কৃত হয়। প্রাচীনতম ঐতিহাসিক হেরোডোটাস্ বলেন ১৪১৬—১৩৫৭ খ্রীস্ট পূর্বাব্দে সিমোসত্রিসের রাজত্বকালে মিশরদেশে এই বিদ্যার উৎপত্তি হয়। অবশ্য এই কথার মূলে কোন সত্য আছে কিনা, বা ইহা তাঁহার কল্পনামাত্র, তাহা নির্দিষ্টরূপে বলিবার উপায় নাই। অপর কেহ কেহ বলেন, প্রসিদ্ধ গণিতজ্ঞ থেল্‌স্ মিশর হইতে এই বিদ্যা শিক্ষা করিয়া গ্রীস্‌দেশে প্রচার করেন।* যাহা হউক, থেল্‌স্‌ই গ্রীস্‌দেশের প্রথম

* আমাদের দেশে এরূপ কিংবদন্তী আছে যে দেবগণ মনুষ্যদিগকে এই বিদ্যা শিক্ষা দিয়াছিলেন। কোন নূতন তত্ত্ব আবিষ্কৃত হইলে লোকে তাহা সহজে গ্রহণ করিতে চাহিবে না এই আশঙ্কায় ঐরূপ "দোহাই" দেওয়া হইত বলিয়া মনে হয়।

বিখ্যাত জ্যামিতিজ্ঞ। তাঁহার বহু শিষ্যের মধ্যে পিথাগোরাসই * প্রধান। পিথাগোরাস জ্যামিতির প্রভূত উন্নতি সাধন করেন। তিনিই প্রথম জ্যামিতিকে ইহার বর্তমান যুক্তিমূলক বৈজ্ঞানিক সোপানে আরোহণ করান। পিথাগোরাসের পর, আনক্ষগোরাস, ব্রিসো, ডিমোক্রিটিস প্রভৃতি অনেকে জ্যামিতি বিষয়ক গবেষণা করিয়াছেন: প্রসিদ্ধ দার্শনিক পণ্ডিত প্লেটো জ্যামিতির চর্চা করিতেন।

ইহার পর আসিলেন ইউক্লিড্। তিনি জ্যামিতির কোন মৌলিক তত্ত্ব আবিষ্কারের জন্য প্রসিদ্ধ নহেন। তাঁহার পূর্বে জ্যামিতি শাস্ত্রের কোন যুক্তিযুক্ত ধারা বা যথাযথ শৃঙ্খলা ছিল না। তিনিই প্রথমে সমস্ত জ্যামিতির ইতস্তত বিক্ষিপ্ত তত্ত্বগুলি সংগ্রহ করিয়া বিশেষ নৈপুণ্য সহকারে ধারাবাহিক-রূপে বিভিন্ন অধ্যায়ে বিভক্ত করিয়া এক বিরাট গ্রন্থ প্রণয়ন করেন। উহা Euclid's Elements নামে পরিচিত। বর্তমান জ্যামিতিক শৃঙ্খলা তাঁহারই দান, এবং এই কার্যে তিনি অদ্ভুত সফলতা লাভ করেন। বহু শতাব্দী অতীত হইয়াছে, আজও আমরা জ্যামিতি শাস্ত্র তাঁহার প্রণালী অনুসরণ করিয়া অধ্যয়ন করি। বর্তমানে অবশ্য, বিশেষত সমান্তরাল রেখা সম্পর্কীয় মতবৈষম্যের ফলে, নূতন ধরণের জ্যামিতিগ্রন্থ রচিত হইতেছে, কিন্তু ইউক্লিড্ অনুসৃত প্রণালী সহজে বোধগম্য হওয়ায় জ্যামিতি শাস্ত্রের এত প্রচার ও প্রসার হইয়াছে।

---

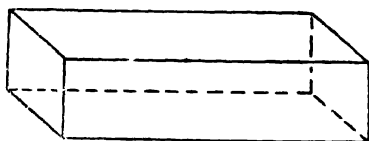
* সার জন্ উড্রফ্ বলেন যে জ্যামিতি হিন্দুগণ বোধায়নের শুল্ভ সূত্রের সময় হইতেই চর্চা করিতেন। পিথাগোরাস ভারতবর্ষ হইতে জ্যামিতি শাস্ত্র শিক্ষা করেন।

প্রথম খণ্ড

প্রথম খণ্ড

প্রথম অধ্যায়

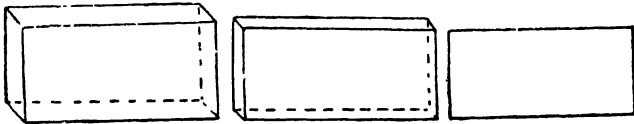
প্রস্তাবনা

১। আমরা চতুর্দিকে দৃষ্টিপাত করিলে নানা আকারের ও বিভিন্ন প্রকারের পদার্থ দেখিতে পাই। ইহাদের সকলেই কিছু না কিছু স্থান ব্যাপিয়া রহিয়াছে। টেবিল, বাক্স, বল, ইট, গাছ, পাথর প্রভৃতি আশে পাশের অল্প-বিস্তর স্থান অধিকার করিয়া আছে। লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে যে একই বস্তু উত্তর-দক্ষিণে ও পূর্ব-পশ্চিমে কতকটা এবং উপরে ও নীচের দিকে কিছু বিস্তারিত রহিয়াছে। এই নানা দিকের বিস্তারকে **দৈর্ঘ্য** (length), **প্রস্থ** (breadth) ও **উচ্চতা** বা **বেধ** (height or thicknes বলিয়া অভিহিত করা হয়।

২। উপরের ইটের ছবিখানি হইতে বুঝা যাইবে যে ইহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে। ইহাদিগকে **আয়তন** বা **মাত্রা** (dimension) বলা হয়।

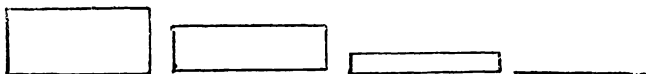
৩। কোন জিনিসের এই তিনটি আয়তন বা মাত্রা জানিতে পারিলে জিনিসটি সম্পর্কে একটা পুরাপুরি ধারণা হয়। যদি বলা হয় 'বাক্স', তাহা হইলে জিনিসটি সম্পর্কে তুমি মনে মনে কোন নির্দিষ্ট ছবি আঁকিতে পারিবে

না। কিন্তু যদি বলি ইহার দৈর্ঘ্যের মাপ ২ হাত, প্রস্থের মাপ ১ হাত এবং ইহার উচ্চতার মাপ ১ হাত, তাহা হইলে ইহার আয়তন বা আকার সম্পর্কে মনে মনে পুরা ছবিটি ধারণা করিতে পারিবে।

৪। যে সমস্ত পদার্থের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা—এই তিনটি আয়তন বা মাত্রা আছে, আমরা তাহাদিগকে **ঘনবস্তু** (Solid) বলিয়া অভিহিত করি। পূর্ব পৃষ্ঠার ছবিখানি একটি ঘনবস্তুর ছবি। যে সকল ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ আমরা সাধারণত দেখি না, যেমন একটি **গোলকের** (Ball), সেইগুলিকেও আমরা দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ-বিশিষ্ট ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ঘনবস্তুর সংযোগে গঠিত বলিয়া কল্পনা করিয়া লইতে পারি।

৫। ইটখানি লক্ষ্য করিলে দেখিতে পাইবে ইহার ছয়টি পৃষ্ঠ আছে (নিম্নের ১নং চিত্র)। এখন উহাকে ঘুরাইয়া এমনভাবে রাখ যাহাতে তুমি মাত্র একটা পৃষ্ঠই দেখিতে পাও।

(১নং চিত্র) (২নং চিত্র) (৩নং চিত্র)

৩নং চিত্রে সমানের পৃষ্ঠটি ভিন্ন অন্য কোন পৃষ্ঠই দেখিতে পাইতেছ না। ইহার মাত্র দৈর্ঘ্য ও প্রস্থই আছে বলিতে পার কিন্তু উহা কতখানি পুরু অর্থাৎ উহার বেধ আছে কিনা তাহা না চিন্তা করিয়াও উহার একটি পৃষ্ঠ সম্পর্কেই কল্পনা করিতে পার। এই শুধু পৃষ্ঠকেই, অর্থাৎ যাহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থই আছে কিন্তু কোন বেধ নাই তাহাকে **তল** বা **পৃষ্ঠ** (Surface) বলিয়া অভিহিত করা হয়।

৬। এখন, ইটখানির শুধু একটি পৃষ্ঠ লইয়া যদি উহার দৈর্ঘ্য স্থির রাখিয়া প্রস্থকে অনবরত কমান যায়, তবে ক্রমান্বয়ে আমরা এমন একটি অবস্থায় উপস্থিত হইব, যখন তলটির আর প্রস্থ মোটেই থাকিবে না, শুধু দৈর্ঘ্যই থাকিবে, তখন উহা একটি **রেখায়** (Line) পরিণত হইবে। নিম্নের চিত্রে উহা দেখান গেল।

৭। অবশ্য, সাধারণত আমরা এমন কোন জিনিসই দেখিতে পাইব না যাহার কোন বেধ বা প্রস্থ নাই, তবে আমরা উহার ধারণা করিতে পারি। একখানি কাগজ লইয়া যদি সমানভাবে ভাজ করি তাহা হইলে যে দাগটি পড়িবে, তাহাকে একটি রেখা বলা চলে। ঘরের দেওয়াল যে জায়গায় ছাদের সহিত মিশিয়াছে, সেখানে একটি রেখা উৎপন্ন হইয়াছে।

৮। এখন একটি সরল রেখাকে লইয়া যদি ক্রমাগত আমরা উহার দৈর্ঘ্য কমাইতে থাকি তাহা হইলে ক্রমান্বয়ে আমরা এমন অবস্থায় পৌঁছিব যে উহার আর দৈর্ঘ্য মোটেই থাকিবে না, তবে, বুঝিতে পারিব যে উহা আছে অর্থাৎ উহার অবস্থিতি আছে, তখন আমরা একটি **বিন্দু** (Point) পাইব। নিম্নের চিত্রে সরল রেখা হইতে ক্রমান্বয়ে একটি বিন্দুতে পৌঁছান হইয়াছে।

---- -------- · · ·· -- -- ---- •

৯। গণিত শাস্ত্রের যে শাখায় রেখা, ক্ষেত্র ও আয়তন বিষয়ক তথ্যাদি আলোচিত হইয়াছে তাহাকে **জ্যামিতি** (Geometry) বলে।

সংজ্ঞা-প্রকরণ

১। **বিন্দু** (Point)

পূর্বে যে আলোচনা করা হইয়াছে, তাহা হইতে বুঝিতে পারিয়াছ যে, যাহার অবস্থিতি আছে কিন্তু কোন আয়তন (দৈর্ঘ্য, প্রস্থ বা বেধ) নাই, তাহাকে **বিন্দু** বলে।

প্রকৃতপক্ষে বিন্দু কল্পনামাত্র। যাহার কোন আয়তন নাই, এরূপ বিন্দু অঙ্কিত করা কখনই সম্ভবপর নয়। একটি সূচ্যগ্র পেন্‌সিল দ্বারা একটি ডট্ (ফুট্‌কির মত চিহ্ন) করিলে, তাহা বিন্দুর সামিল হইবে; যদিও তাহাও আয়তনহীন নয়, তবে আমরা এই প্রকার একটি সূক্ষ্ম ডট্‌কে বিন্দু বলিয়া মোটামুটি ধরিয়া লইতে পারি।

বিন্দু সম্বন্ধে নিম্নলিখিত ধারণাগুলি ঠিক রাখা প্রয়োজন।

(১) দুইটি রেখা একটি বিন্দুতে মিলিত হয় এবং দুইটি রেখা একটি বিন্দুতে পরস্পরকে অতিক্রম করে।

(২) একটি বিন্দুর কোনই আয়তন নাই; সুতরাং জ্যামিতিক বিন্দু একটু স্থানও অধিকার করে না।

(৩) একটি বিন্দু সাধারণত একটি ডট্ দিয়া দেখান হয়। যদিও আমরা জানি যে ডট্‌টির সামান্য আয়তন আছে, এজন্য তাহা প্রকৃত জ্যামিতিক বিন্দু নহে। ঐ ডট্‌টি যত ক্ষুদ্রতর হইবে, ততই তাহা বিন্দুর সামিল হইবে।

বিন্দুর পার্শ্বে একটি অক্ষর লিখিয়া উহার পরিস্থিতির নির্দেশ দেওয়া হয়; যেমন, . A. A বলিতে বিন্দুটিকেই বুঝিতে হইবে।

২। **রেখা** (Line)

যদি কতকগুলি বিন্দু এমনভাবে পর পর রাখিয়া যাও যে উহার একটি হইতে অন্যটির কোন দূরত্ব থাকিবে না তাহা হইলে একটি রেখার সৃষ্টি হইবে।

জ্যামিতিক রেখার দৈর্ঘ্য আছে কিন্তু বিস্তার বা বেধ নাই।

খুব সূক্ষ্ম পেন্‌সিল দিয়া দাগ কাটিলেও আমরা জ্যামিতিক রেখা পাইব না। কারণ এরূপ দাগেরও বিস্তার আছে কিন্তু সাধারণ কার্যে আমরা এরূপ সূক্ষ্ম দাগকে রেখা বলিয়া ধরিতে পারি।

রেখা দুই প্রকার—(ক) **সরল রেখা** ও (খ) **বক্র রেখা**।

(ক) যে রেখা আগাগোড়া একই দিক্ ধরিয়া চলিয়াছে অর্থাৎ যাহার যে-কোন এক বিন্দু হইতে যে-কোন অন্য এক বিন্দু পর্যন্ত যাইতে হইলে কোন দিক্ পরিবর্তন করিতে হয় না তাহাকে **সরল রেখা** (Straight line) কহে। নিম্নের ১নং চিত্রের AB একটি সরল রেখা।

(খ) যে রেখা সরল নহে তাহা **বক্র রেখা** (Curved line). বক্র রেখার এক বিন্দু হইতে অন্য এক বিন্দু পর্যন্ত যাইতে হইলে দিক্ পরিবর্তন করিতে হয়। নিম্নের ২নং চিত্রের PQ একটি বক্র রেখা।

গ্রীসীয় পণ্ডিত আর্কিমিডিস্ সরল রেখার অন্য প্রকারের সংজ্ঞা দিয়াছেন তিনি বলেন, "**দুই বিন্দুর মধ্যে ন্যূনতম দূরত্বের নাম সরল রেখা**।"

আমরা এই সংজ্ঞা দ্বারা সরল রেখার ধারণা আরও স্পষ্ট করিতে পারি।

সরল রেখার প্রান্তদ্বয়ে দুইটি অক্ষর দিয়া তাহার নামকরণ করিতে হয়। উপরের ১নং চিত্রে AB উক্ত সরল রেখাটিকে বুঝাইতেছে।

সরল রেখা সম্পর্কে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি লক্ষ্য করিতে হইবে :—

(১) দুই বিন্দুর মধ্যে একটি মাত্র সরল রেখা টানা যায়।

(২) দুই সরল রেখা একাধিক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিতে পারে না। তাহা হইলে, দুই সরল রেখা কোন ক্ষেত্রকে সীমাবদ্ধ করিতে পারে না।

(৩) আবার দুইটি সরল রেখার সাধারণ কোন অংশ নাই, তাহা হইলে তাহারা নিশ্চয় একের অধিক বিন্দুতে মিলিত হইতে পারিবে।

৩। **তল** (Surface)

তল সম্বন্ধে পূর্বেই কিছু বলা হইয়াছে। যাহার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ আছে কিন্তু বেধ নাই তাহাকে **তল** বলে। তল দুই প্রকার—(ক) **সমতল** (Plane Surface) ও (খ) **বক্রতল** (Curved Surface).

যেমন কয়েকটি বিন্দু পর পর সাজাইয়া গেলে একটি রেখা হয়, সেইরূপ কতকগুলি রেখা পর পর মাঝে কোন ফাঁক না রাখিয়া সাজাইয়া গেলে একটি তল উৎপন্ন হইবে এবং কতকগুলি তল পর পব রাখিয়া গেলে একটি ঘনবস্তুতে পরিণত হইবে।

৪। **সমতল** (Plane Surface)

যে তল উচুনীচু নহে তাহাকে **সমান তল** বা **সমতল** বলে।

একটি পেন্‌সিল অথবা ঐরূপ কোন দ্রব্য যদি সমতলে স্থাপন করা যায়, তবে তাহা সর্বতোভাবে তলটির গায়ে লাগিয়া থাকিবে। কোথায়ও একটু ফাঁক থাকিবে না।

যদি কোন সরল রেখার কোন একটি প্রান্তবিন্দু স্থির রাখিয়া উহাকে কোনরূপ উচুনীচু না করিয়া সমানভাবে ঘুরান যায় তবে সেই সরল রেখা একটি সমতলের সৃষ্টি করিবে।

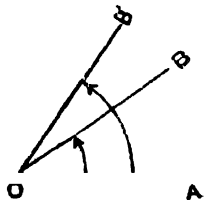
সরল রেখাই সমতলের ছেদ-রেখা। সুতরাং সহজেই বুঝা যায় যে, একই সরল রেখা যদিচ্ছা সংখ্যক সমতলে অবস্থান করিতে পারে। আবার একই সরল রেখায় যদিচ্ছা সংখ্যক সমতল অবস্থিত থাকিতে পারে।

সুতরাং একটি মাত্র সরল রেখা দেওয়া থাকিলে অথবা সমতলের উপরিস্থিত দুইটি বিন্দু দেওয়া থাকিলে আমরা একটি নির্দিষ্ট সমতল পাইব না। উক্ত সরল রেখার বহিঃস্থ আরও একটি বিন্দু দেওয়া থাকিলে, তবে সমতলটি ঠিক পাওয়া যাইবে।

৫। **কোণ** (Angle)

কোন বিন্দুতে তুইটি সরল রেখা মিলিত হইয়া একটি **কোণ** উৎপন্ন করে, এরূপ বলা হয়।

সরল রেখা তুইটির প্রত্যেকটিকে ঐ কোণের **বাহু** (Arm) বলে এবং যে বিন্দুতে তাহারা মিলিত হইয়াছে তাহাকে **শীর্ষবিন্দু** (Vertex) বলে।

সাধারণত কোন কোণকে তিনটি অক্ষব দ্বারা প্রকাশ করা হয়। উহার মধ্যের অক্ষরটি শীর্ষবিন্দু নির্দেশ করে। যথা পার্শ্বের চিত্রের AOB একটি কোণ। OA, OB এখানে বাহুদ্বয় বুঝাইতেছে। এবং O এখানে শীর্ষবিন্দু। AOB কোণটিকে বুঝাইতে ∠AOB বা সংক্ষেপে ∠O লেখা হয়।

দ্রষ্টব্য : আমাদের বিশেষভাবে মনে রাখিতে হইবে যে, কোণের পরিমাণ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের উপর মোটেই নির্ভর করে না। উপরের চিত্রিত কোণের বাহুদ্বয় যদিচ্ছা বাড়াইয়া দিলেও কোণের পরিমাণ সমান থাকিবে।

কোণের পরিমাণ বাহুদ্বয়ের কোন একটি কতখানি ঘুরিয়া আসিল তাহা দ্বারা পরিমাপ করা হয়। ধরা যাউক OA বাহু স্থির আছে। এবং OB বাহু OA বাহুর উপর পড়িয়াছে।

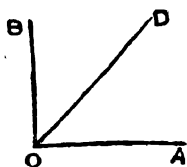
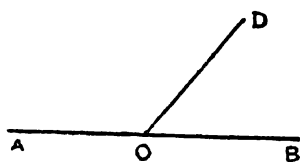
এ অবস্থায় OB বাহু, OA হইতে চিত্রের OB পর্যন্ত আসিতে যে পরিমাণ ঘুরিবে, তাহাই কোণের পরিমাপক। সুতরাং বাহু অধিক দীর্ঘ হইলেও, ঘূর্ণনের পারিমাণ সমান হইবে।

আবার OB আর একটু বেশি ঘুরিয়া OB′ অবস্থানে গেলে, যে AOB′ কোণ হইবে তাহা AOB কোণের চেয়ে বড় হইবে।

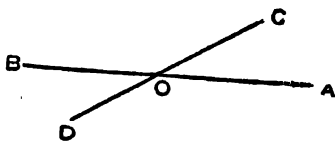
৬। **সমান কোণ** (Equal angles)

তুইটি কোণ যদি এরূপ হইয়া থাকে যে একের বাহুদ্বয় অপরের বাহুদ্বয়ের সহিত সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যায়, তবেই কোণ তুইটি **সমান কোণ** হইবে।

৭। **সন্নিহিত কোণ** (Adjacent angles)

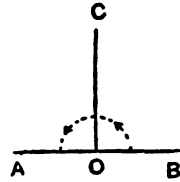
কোন একটি বিন্দুতে যদি তিনটি সরল রেখা টানা যায়, তবে মধ্যবর্তী সরল রেখাটি তাহার দুই পার্শ্বে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করিবে তাহাদিগকে **সন্নিহিত কোণ** এবং মধ্যবর্তী সরল রেখাটিকে সন্নিহিত কোণদ্বয়ের **সাধারণ বাহু** (Common arm) বলা হয়। নিম্নের ১নং চিত্রে AOD এবং DOB কোণদ্বয় সন্নিহিত কোণ এবং OD উহাদের সাধারণ বাহু।

(১নং চিত্র) (২নং চিত্র)

কোন সরল রেখা অন্য একটি সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইলেও এরূপ সন্নিহিত কোণ সৃষ্টি করিতে পারে (যেমন, ২নং চিত্র)।

৮। **বিপ্রতীপ কোণ** (Vertically opposite angles)

দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে, ছেদ-বিন্দুর বিপরীত দিকের দুইটি কোণকে **বিপ্রতীপ কোণ** বলা হয়।

যেমন ∠AOD ও ∠BOC বিপ্রতীপ কোণ ;
এবং ∠BOD ও ∠AOC বিপ্রতীপ কোণ।

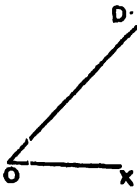
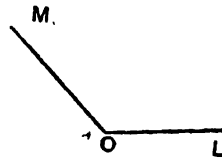
৯। **সমকোণ** (Right angle)

একটি সরল রেখা যদি অপর একটি সরল রেখার উপর এরূপভাবে দণ্ডায়মান হয় যে ঐ সরল রেখার উভয় পার্শ্বস্থ সন্নিহিত কোণ দুইটি পরস্পর সমান, তবে তাহাদের প্রত্যেক কোণকে **সমকোণ** কহে। আর উহার যে-কোন একটি সরল রেখাকে অপরটির উপর **লম্ব** (Perpendicular) বলে।

AB সরল রেখার উপর AOC, BOC দুইটি সন্নিহিত কোণ এবং তাহারা পরস্পর সমান। উহাদের প্রত্যেকটি সমকোণ। CO, ABর উপর লম্ব হইয়াছে। অথবা AO এবং BO, COর উপর লম্ব হইয়াছে।

সকল সমকোণই সমান হয় সুতরাং সমকোণ একক দ্বারা আমরা অপর কোণের পরিমাপ করিতে পারি। যেমন একটি কোণ দুই বা তিন সমকোণের সমান, অথবা এক সমকোণের অর্ধেক বা এক-তৃতীয়াংশ ইত্যাদি।

আমরা একটি সমকোণকে ৯০ ভাগে ভাগ করিয়া, প্রত্যেক অংশকে এক **ডিগ্রি** (°) বলিয়া অভিহিত করি। এক ডিগ্রিকে আবার ৬০ ভাগে ভাগ করিয়া প্রত্যেক ভাগকে এক **মিনিট** (′) এবং এরূপ এক মিনিটকে আবার ৬০ ভাগে ভাগ করিয়া প্রত্যেক ভাগকে এক **সেকেণ্ড** (″) বলিয়া থাকি।

১০। কোণের পরিমাপের নামকরণ

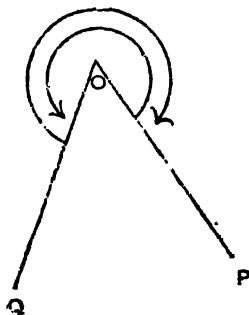
(**ক**) যে কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা ছোট, তাহাকে **সূক্ষ্ম কোণ** (Acute angle) কহে। ১নং চিত্রের ∠XOD সূক্ষ্ম কোণ।

(১নং চিত্র) (২নং চিত্র)

(**খ**) যে কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা বড় অথচ দুই সমকোণ অপেক্ষা ছোট, তাহাকে **স্থূল কোণ** (Obtuse angle) বলে। ২নং চিত্রের ∠LOM স্থূল কোণ।

(গ) একটি সরল রেখা যদি ঘুরিয়া দুই সমকোণের সৃষ্টি করে অর্থাৎ সে রেখাটি স্থির রেখাটির বিপরীত দিকে এমনভাবে মিলিয়া যায়, যাহাতে মনে হয় যেন পূর্বের রেখাটিকে বাড়াইয়া দেওয়া হইয়াছে এবং ইহা স্থির রেখার সহিত একই সরল রেখায় পরিণত হইয়াছে, তাহা হইলে সৃষ্ট দুই সমকোণের সমান কোণকে **সরল কোণ** (Straight angle) বলে। চিত্রের $\angle$ BOA সরল কোণ।

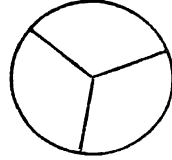
(ঘ) যদি রেখাটি ঘুরিতে ঘুরিতে দুই সমকোণেরও অধিক পথ অতিক্রম করে, তখন দুই সমকোণেরও অধিক যে কোণ হয়, তাহাকে **প্রবৃদ্ধ** বা **কুব্জ কোণ** (Reflex or Re-entrant angle) বলে। নিম্নের চিত্রের উপরের দিক্‌কার $\angle$ POQ প্রবৃদ্ধ কোণ।

১১। কোণের দিঙ্‌ নির্ণয়

রেখা ঘুরিয়া কোণ সৃষ্টি করিয়া থাকে। একটি সরল রেখা যে-কোন অবস্থানে দুই দিক্ দিয়া ঘুরিয়া আসিতে পারে। যখন তাহা ঘড়ির কাঁটা যে ভাবে ঘুরে সেই ভাবে ঘুরিয়া আসে, তখন তাহাকে **ঋণাত্মক** (Negative) মনে করিলে, যখন তাহা ঘড়ির কাঁটা যেরূপে ঘুরে তাহার বিপরীতভাবে ঘুরিয়া আসে, তখন তাহাকে **ধনাত্মক** (Positive) বলিতে হইবে। সুতরাং একই স্থানে একটি ধনাত্মক অথবা একটি ঋণাত্মক কোণ থাকিতে পারে।

১২। **সমতল ক্ষেত্র** (Plane figure)

এক বা ততোধিক রেখাদ্বারা যে সমতল সীমাবদ্ধ হইয়াছে, তাহাকে (বা সমতল অংশকে) **সমতল ক্ষেত্র** বলে।

১৩। **বৃত্ত** (Circle)

কোন সসীম সরল রেখার এক প্রান্ত স্থির রাখিয়া যদি তাহাকে কোন সমতলের উপর একবার সম্পূর্ণভাবে ঘুরান যায়, তবে ঐ রেখা যে স্থান পরিভ্রমণ করিবে তাহাকে **বৃত্ত** বলা হয়।

বৃত্তের অন্য সংজ্ঞা এইরূপ :—

যদি কোন সমতল ক্ষেত্র এক বক্র রেখা দ্বারা এরূপভাবে সীমাবদ্ধ হয় যে, তাহার অভ্যন্তরস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সীমা পর্যন্ত যতগুলি সরল রেখা টানা যায় তাহারা সকলেই পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রকে **বৃত্ত** বলে।

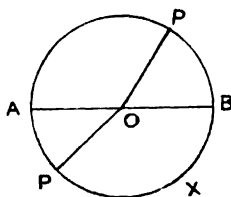
(ক) বৃত্তের সীমাসূচক রেখাকে **পরিধি** (Circumference) বলে।

বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ যে নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার সীমা (পরিধি) পর্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখা পরস্পর সমান তাহাকে ঐ বৃত্তের **কেন্দ্র** (Centre) বলে।

(খ) বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত যে-কোন সরল রেখাকে ঐ বৃত্তের **অর** বা **ব্যাসার্ধ** (Radius) বলে। (বৃত্তের অরগুলি সমান।)

বৃত্তের পরিধির যে-কোন অংশকে **চাপ** (Arc) বলে।

বৃত্তের ব্যাস ও পরিধি দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশকে **অর্ধবৃত্ত** (Semi-circle) বলে।

পার্শ্বস্থ চিত্রে OP অর, AB ব্যাস, O কেন্দ্র, APXB বক্র রেখাটি পরিধি হইয়াছে। APXBর মধ্যস্থ সমস্ত স্থানটি বৃত্ত।

মন্তব্য : এই প্রাথমিক জ্যামিতি যাহাতে শুধুমাত্র সমতল ও সমতলে অবস্থিত রেখা এবং রেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রাদির আলোচনা করা হয়, তাহাকে **সামতলিক জ্যামিতি** (Plane Geometry) বলে। ইহাকে কখনও কখনও **দ্বিমাত্রিক জ্যামিতি** (Geometry of two dimensions) বলা হয়, কারণ সমতলের দুই মাত্রা—দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ; এবং যে জ্যামিতিতে ঘনবস্তুর বিষয় লইয়া আলোচনা হয়, তাহাকে **ত্রৈমাত্রিক জ্যামিতি** (Solid Geometry) বা ঘনবস্তু সম্বন্ধীয় জ্যামিতি বলা হয়।

জ্যামিতিক যুক্তি

জ্যামিতির প্রামাণ্য বিষয়কে (সাবারণ অথবা অঙ্কন সম্বন্ধীয়) সাধারণভাবে **প্রতিজ্ঞা** (Proposition) বলা হয়।

দুই প্রকারের প্রতিজ্ঞা আছে—(১) **উপপাদ্য** (Theorem), (২) **সম্পাদ্য** (Problem).

উপপাদ্যে আমরা একটি জ্যামিতিক সত্য প্রতিষ্ঠিত করি। সম্পাদ্যে আমরা কোন জ্যামিতিক অঙ্কন সম্পাদন করি।

প্রত্যেক প্রতিজ্ঞার চারিটি অঙ্গ আছে; যথা, **সাধারণ নির্বচন**, **বিশেষ নির্বচন**, **অঙ্কন** এবং **প্রমাণ**।

১। **সাধারণ নির্বচন** (General Enunciation)

সাধারণ নির্বচনে সা ধারণ নির্বচন বিষয় (অথবা অঙ্কন বিষয়) সাধারণ কথায় বিবৃত করা হয়।

কেহ কেহ আবার উপপাদ্যের সাধারণ নির্বচনের দুই ভাগ করিয়াছেন—

(১) **কল্পনা** (Hypothesis)—যে জ্যামিতিক সত্য ধরিয়া লওয়া হইয়াছে ;

(২) **সাধ্য** বা **সিদ্ধান্ত** (Conclusion)—উক্ত কল্পনা হইতে যে সত্য প্রতিষ্ঠিত করিতে হইবে।

সম্পাদ্যের সাধারণ নির্বচনেরও ঐরূপ দুইটি বিভাগ করা হয়—

(১) **উক্তি** (Data)—যাহা দেওয়া আছে ;

(২) **করণীয়** (Quaesita)—যাহা অঙ্কন করিয়া দেখাইতে হইবে।

২। **বিশেষ নিবচন** (Particular Enunciation)

বিশেষ নির্বচনে যাহা প্রমাণ করিতে হইবে (অথবা যাহা অঙ্কন করিতে হইবে) তাহা কোন চিত্র বিশেষের সহিত সম্পর্কিত করিয়া পুনরুল্লেখ করা হয়।

৩। **অঙ্কন** (Construction)

অঙ্কন অংশে প্রতিজ্ঞার সত্যতা প্রমাণে যে সব সরল রেখা ও বৃত্তাদির অঙ্কন আবশ্যক হইতে পারে, তাহা সমুদয় বর্ণিত হয়।

(সকল প্রমাণেই যে অঙ্কন আবশ্যক তাহা নহে।)

৪। **প্রমাণ** (Proof)

প্রমাণে প্রামাণ্য বিষয় (অথবা অঙ্কন কার্য) যে যুক্তিদ্বারা প্রমাণিত হইল (অথবা সাধিত হইল) তাহা দেখান হয়।

৫। কোন প্রতিষ্ঠিত প্রতিজ্ঞা হইতে যে সত্য সহজেই অনুমেয় হয়, তাহাকে প্রতিষ্ঠিত প্রতিজ্ঞার **অনুসিদ্ধান্ত** (Corollary) বলা হয়।

অনুসিদ্ধান্তগুলি প্রতিজ্ঞা সিদ্ধান্তের পরেই উল্লেখ করা হয়।

স্বতঃসিদ্ধ

জ্যামিতির প্রকরণগুলি এমন কয়েকটি সাধারণ সরল সত্যের উপর প্রতিষ্ঠিত যে তাহাদের সত্যতা সম্বন্ধে কোনই প্রশ্ন উঠে না। সকলেই সে সকল সত্যকে প্রমাণ ব্যতীরেকে উপলব্ধি করে ও স্বীকার করে। বস্তুত তাহারা কতকগুলি প্রাথমিক ধারণা মাত্র; এজন্য তাহাদের কোন প্রমাণ দেওয়া সম্ভব হয় না। এই সকল আপনা আপনি সিদ্ধ সত্যকে **স্বতঃসিদ্ধ** (Axioms) বলা হয়।

স্বতঃসিদ্ধগুলি এই :—

১। যে সকল বস্তু বা রাশি একই বস্তু বা রাশির সমান তাহারা পরস্পর সমান হয়।

২। সমান সমান বস্তু বা রাশির সহিত সমান সমান (বা একই) বস্তু বা রাশি যোগ করিলে সমষ্টিগুলিও সমান হয়।

৩। সমান সমান বস্তু বা রাশি হইতে সমান সমান (বা একই) বস্তু বা রাশি বিয়োগ করিলে অবশিষ্টগুলিও সমান হয়।

৪। অসমান বস্তু বা রাশির সহিত সমান সমান (বা একই) বস্তু বা রাশি যোগ করিলে সমষ্টিগুলিও অসমান হয়।

৫। অসমান বস্তু বা রাশি হইতে সমান সমান (বা একই) বস্তু বা রাশি বিয়োগ করিলে অবশিষ্টগুলিও অসমান হয়।

৬। সমানের দ্বারা সমান গুণিত হইলে, গুণফলগুলিও পরস্পর সমান হইবে।

৭। সমানের দ্বারা সমান বিভক্ত হইলে ভাগফলগুলিও পরস্পর সমান হইবে।

৮। সম্পূর্ণ রাশি বা বস্তু তাহার যে-কোন অংশ অপেক্ষা বৃহত্তর।

৯। দুইটি সরল রেখা একটি ক্ষেত্র পরিবেষ্টিত করিতে পারে না।

১০। যে সকল রাশি (রেখা, কোণ বা ক্ষেত্র) পরস্পরের সহিত মিলিয়া যায়, তাহারা পরস্পর সমান।

স্বীকার্য (Postulate)

প্রতিজ্ঞা ও উপপাদ্য সমাধানের প্রয়োজনে কতকগুলি অঙ্কন ও চিত্ররেখা যে সম্ভব তাহা আমাদের স্বীকার করিয়া লইতে হইবে।

আমরা স্বীকার করিয়া লইব যে—

১। যে-কোন বিন্দু হইতে অন্য যে-কোন বিন্দু পর্যন্ত একটি সরল রেখা অঙ্কন করা যায়।

২। কোন সীমাবিশিষ্ট সরল রেখাকে উভয় দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করা যায়।

৩। যে-কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন দৈর্ঘ্যকে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।

স্বীকার্য অঙ্কন

আমরা স্বীকার করিয়া লইতে চাহি যে—

১। কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাস্থ বা তাহার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে তাহার উপর একটি লম্ব অঙ্কন করা যাইতে পারে।

২। কোন নির্দিষ্ট কোণকে একটি সরল রেখাদ্বারা দ্বিখণ্ডিত করা যাইতে পারে।

৩। কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এক বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করা যাইতে পারে।

সাঙ্কেতিক চিহ্ন

জ্যামিতিতে নিম্নলিখিত সঙ্কেতগুলি ব্যবহৃত হয় :—

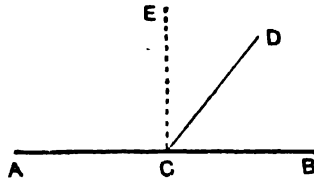
চিহ্ন	অর্থ	চিহ্ন	অর্থ
$\therefore$	সুতরাং, অতএব	$\perp$	লম্ব
$\because$	যেহেতু	$\odot$	বৃত্ত
$=$	সমান	$\bigcirc$	পরিধি
$\angle$	কোণ	$>$	বৃহত্তর
সম $\angle$	সমকোণ	$<$	ক্ষুদ্রতর
$\triangle$	ত্রিভুজ	$^\circ$	ডিগ্রি
$\square$	বর্গক্ষেত্র	$'$	মিনিট
$\parallel$	সমান্তর	$''$	সেকেণ্ড

দ্বিতীয় অধ্যায়

(রেখা এবং কোণ সম্বন্ধীয় উপপাদ্য)

১ম উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ১।১৩)

যদি একটি সরল রেখা অন্য একটি সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হয়, তাহা হইলে একই পার্শ্বে উৎপন্ন সন্নিহিত কোণদ্বয়ের যোগফল দুই সমকোণের সমান হইবে।

[If a straight line stands on another straight line, the sum of the two angles so formed on one side of it, is equal to two right angles.]

মনে কর, CD সরল রেখা, AB সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইয়া BCD, DCA, এই দুইটি কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BCD, DCA, এই দুইটি কোণের যোগফল দুই সমকোণের সমান।

ধরিয়া লও যে, C বিন্দুতে CE একটি লম্ব টানা হইয়াছে।

প্রমাণ : দেখা যাইতেছে যে,

$$\angle BCD + \angle DCA = \angle BCD + \angle DCE + \angle ECA$$

আবার, $\angle BCE + \angle ECA = \angle BCD + \angle DCE + \angle ECA$;

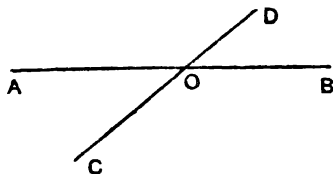
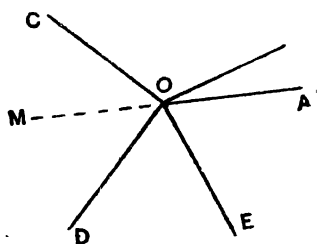
কাজেই $\angle BCD + \angle DCA = \angle BCE + \angle ECA.$

যেহেতু, $\angle BCE + \angle ECA =$ দুই সমকোণ (কারণ, প্রত্যেক কোণটি একটি সমকোণ),

সুতরাং $\angle BCD + \angle DCA =$ দুই সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ১। দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

অর্থাৎ,

$\angle AOD + \angle DOB + \angle BOC + \angle COA =$ চারি সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ২। কতকগুলি সরল রেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে উহারা পরস্পর যে কোণগুলি উৎপন্ন করে তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান। [AOকে M পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া প্রমাণ কর।]

সংজ্ঞা

১। **পূরক কোণ** (Complementary angles)

যে-কোন দুই কোণের যোগফল এক সমকোণের সমান হইলে তাহাদিগকে **পূরক কোণ** বলা হয়; তাহারা প্রত্যেকে একে অপরের পূরক।

দুই পূরক কোণের যোগফল $90°$ হইবে; সুতরাং একটি $31°$ কোণ অপর একটি $59°$ কোণের পূরক।

২। **সম্পূরক কোণ** (Supplementary angles)

যে-কোন দুই কোণের যোগফল দুই সমকোণ হইলে তাহাদিগকে **সম্পূরক কোণ** বলা হয়; তাহার প্রত্যেকে একে অপরের সম্পূরক।

দুই সম্পূরক কোণের যোগফল 180° হইবে। সুতরাং একটি 112° কোণ অপর একটি 68° কোণের সম্পূরক।

স্বতঃসিদ্ধ

একই কোণের বা সমান সমান কোণের পূরকগুলি পরস্পর সমান হইবে।

একই কোণের বা সমান সমান কোণের সম্পূরকগুলি পরস্পর সমান হইবে।

অন্বয়ী প্রমাণ ও ব্যতিরেকী প্রমাণ

প্রতিজ্ঞা প্রতিষ্ঠা করিতে দুই প্রকার প্রমাণের প্রয়োগ আছে—

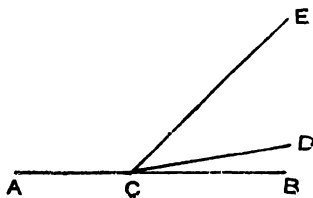
(১) **অন্বয়ী প্রমাণ** (Direct Proof) : অন্বয়ী প্রমাণে কোন কল্পনা ধরিয়া লইয়া জ্যামিতিক যুক্তিপরম্পরায় সিদ্ধান্ত প্রতিষ্ঠিত করা হয়। এখানে কল্পনা হইতে সাক্ষাৎ (Direct) সম্বন্ধে সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে হয়।

(২) **ব্যতিরেকী প্রমাণ** (Indirect Proof) : ব্যতিরেকী প্রমাণে সিদ্ধান্তকে অস্বীকার করিয়া তারপর যুক্তিপরম্পরা দ্বারা এমন এক সিদ্ধান্তে আসা হয়, যাহা স্পষ্টত অসম্ভব, অসঙ্গত বা সত্য-বিরুদ্ধ (কখনও কখনও স্বভাববিরুদ্ধ)। এতদ্দ্বারা এরূপ অনুমান করা হয় যে নির্দিষ্ট সিদ্ধান্তটিকে অস্বীকার করা যায় না এবং তাহা সত্য না হইয়াই পারে না।

সাধারণত কোন প্রতিষ্ঠিত প্রতিজ্ঞার বিপরীত প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করিবার জন্য ব্যতিরেকী প্রমাণ প্রযুক্ত হয়। যেমন, ২য় উপপাদ্যে উহার প্রয়োগ হইয়াছে।

২য় উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ১।১৪)

যদি একটি সরল রেখার কোন বিন্দুতে উভয় পার্শ্ব হইতে অপর তুইটি সরল রেখা মিলিত হইয়া সন্নিহিত কোণদ্বয়ের যোগফল তুই সমকোণের সমান করে, তাহা হইলে এই শেষোক্ত সরল রেখাদ্বয় একই সরল রেখার অন্তর্গত হইবে।

[If, at a point in a straight line two other straight lines on opposite sides of it, make the adjacent angles together equal to two right angles, then these two straight lines are in one and the same straight line.]

EC সরল রেখার C বিন্দুতে AC, BC তুইটি সরল রেখা উভয় পার্শ্ব হইতে মিলিত হইয়াছে এবং ∠ACE+∠BCE=তুই সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AC, CB একই সরল রেখার অন্তর্গত।

AC, CB যদি এক সরল রেখার অন্তর্গত না হয়,

তবে, ধরিয়া লও AC, CD এক সরল রেখায় অবস্থিত।

প্রমাণ : যেহেতু EC সরল রেখা AD সরল রেখার C বিন্দুতে মিলিয়াছে,

অতএব ∠ACE+∠DCE=তুই সমকোণ (১ম উপপাদ্য)

কিন্তু, ∠ACE+∠BCE=তুই সমকোণ (কল্পনা)

অতএব, $\angle ACE + \angle BCE = \angle ACE + \angle DCE$

উভয় পার্শ্ব হইতে $\angle ACE$ বাদ দিলে,

$$\angle BCE = \angle DCE.$$

কিন্তু অংশ সমগ্র বস্তুর সমান, ইহা অসম্ভব।

সুতরাং CD, CB সরল রেখার সহিত মিলিয়া যাইবে।

অতএব, AC, BC একই সরল রেখার অন্তর্গত।

প্রথম ও দ্বিতীয় উপপাদ্যের তুলনা

প্রথম উপপাদ্যে—দুই সন্নিহিত কোণের সাধারণ বাহু ভিন্ন অপর দুই বাহু একই সরল রেখায় অবস্থিত তাহা দেওয়া আছে।

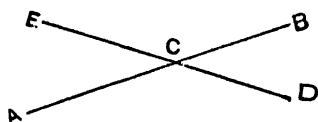
প্রমাণিত হইয়াছে—কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

দ্বিতীয় উপপাদ্যে—সন্নিহিত কোণদ্বয় একত্রে দুই সমকোণের সমান ইহা দেওয়া আছে।

প্রমাণিত হইয়াছে—কোণ দুইটির সাধারণ বাহু ভিন্ন অপর দুই বাহু একই সরল রেখায় অবস্থিত। (৪০ পৃষ্ঠা দ্রষ্টব্য)

৩য় উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।১৫)

যদি দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করে, তবে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

[If two straight lines intersect, the vertically opposite angles are equal.]

AB, DE সরল রেখা দুইটি পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিয়া ACD, ECB এবং ACE, DCB বিপ্রতীপ কোণগুলি উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\angle ACD = \angle ECB$$

এবং $\angle ACE = \angle DCB$.

প্রমাণ ঃ যেহেতু ED সরল রেখার উপর AC সরল রেখা দণ্ডায়মান হইয়াছে, অতএব $\angle ACD + \angle ACE =$ দুই সমকোণ।

আবার, যেহেতু, AB সরল রেখার উপর EC সরল রেখা দণ্ডায়মান হইয়াছে, অতএব $\angle ACE + \angle ECB =$ দুই সমকোণ।

সুতরাং $\angle ACD + \angle ACE = \angle ACE + \angle ECB$;

উভয় পার্শ্ব হইতে $\angle ACE$ বাদ দিলে,

$$\angle ACD = \angle ECB.$$

এই প্রকারে, $\angle ACE = \angle DCB$.

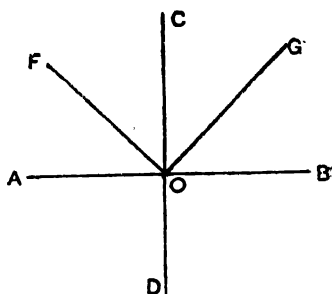
অনুশীলনী (১)

১। নিম্নলিখিত কোণগুলির পূরক বাহির কর ঃ—

15°, 59°, 10°, অর্ধসমকোণ, তিন-চতুর্থাংশ সমকোণ।

২। নিম্নলিখিত কোণগুলির সম্পূরক বাহির কর ঃ—

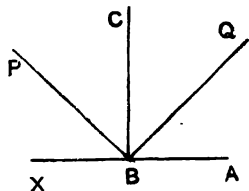
অর্ধসমকোণ, 179° কোণ, দুই-তৃতীয়াংশ সমকোণ।

৩। সরল রেখা AOB, সরল রেখা CODকে O বিন্দুতে এমন-ভাবে ছেদ করিয়াছে যে ∠AOC, ∠COBর সমান হইয়াছে ; প্রমাণ কর, যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হইয়াছে তাহারা প্রত্যেকেই সমকোণ।

৪। পার্শ্বের চিত্রে যদি FO এবং GO, ∠AOC এবং ∠COBকে দ্বিখণ্ডিত করিয়া থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, তাহাদের মধ্যবর্তী কোণ একটি সমকোণ।

৫। উপরের চিত্রের দ্বিখণ্ডক FO (যাহা ∠AOCকে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে), যদি পরিবর্ধন করা যায়, তবে প্রমাণ কর যে, বর্ধিত সরল রেখা ∠BODকে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

চিত্রের যদি FOH, GOK বিপ্রতীপ কোণগুলিকে দ্বিখণ্ডিত করে, তবে দেখাও যে, FOH, GOK পরস্পর লম্ব হইয়াছে।

৬। দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিয়া যে চারিটি কোণ উৎপন্ন করিল (১) তাহাদের একটির পরিমাণ হইল 90°, প্রমাণ কর, সকল কোণই 90° ; (২) তাহাদের একটি কোণ হইল 30°, অপর কোণগুলির পরিমাণ বাহির কর।

সংজ্ঞা। যে দুইটি সরল রেখা যথাক্রমে কোন একটি কোণ ও কোণের সন্নিহিত বহিঃস্থ কোণকে (যাহা কোণের এক বাহুর পরিবর্ধনে উৎপন্ন হইয়াছে) দ্বিখণ্ডিত করে, সেই দুই সরল রেখাকে যথাক্রমে প্রথম কোণের **অন্তর্দ্বিখণ্ডক** (Internal bisector) ও **বহির্দ্বিখণ্ডক** (External bisector) বলা হয়।

চিত্রে QB, PB যথাক্রমে ∠ABC এবং ∠CBXকে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। ABC কোণের QB অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং PB বহির্দ্বিখণ্ডক হইল।

৭। প্রমাণ কর যে, কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং বহির্দ্বিখণ্ডক পরস্পরের মধ্যে একটি সমকোণ সৃজন করে।

৮। প্রমাণ করিয়া দেখাও চিত্রের ∠XBP ও ∠ABQ পরস্পর পূরক।

৯। তৃতীয় প্রতিজ্ঞার বিপরীত প্রতিজ্ঞা প্রমাণ কর।

১০। ঘড়ির বড় কাঁটা (১) 10 মিনিটে, (২) 33 মিনিটে কত ডিগ্রি অতিক্রম করে?

১১। 60° অতিক্রম করিতে ঘড়ির বড় কাঁটার কত সময় লাগে?

১২। পৃথিবীর তাহার অক্ষের উপর একবার পূর্ণভাবে ঘূরিতে ২৪ ঘণ্টা লাগে। ১২ ঘণ্টায় সে কত ডিগ্রি ঘুরিবে? 180° ঘুরিতে তাহার কত সময় লাগিবে?

তৃতীয় অধ্যায়

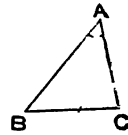
ত্রিভুজ

১। যে সমতল এক বা ততোধিক রেখাদ্বারা পরিবেষ্টিত, তাহাকে **সমতল ক্ষেত্র** কহে।

২। যে সমতল ক্ষেত্র কেবলমাত্র সরল রেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত, তাহাকে **ঋজুরেখ ক্ষেত্র** (Rectilineal figure) বলা হয়। এবং পরিবেষ্টনকারী সরল রেখাগুলিকে **ভুজ** বা **বাহু** (Arm) বলা হয়।

সমতল ক্ষেত্রের পরিমাণকে বলা হয় **কালি** বা **ক্ষেত্রফল** (Area) এবং পরিবেষ্টনকারী বাহুগুলির যোগ-সমষ্টিকে **পরিমিতি** বা **পরিসীমা** (Perimeter) বলা হয়।

৩। তিনটি সরল রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রকে **ত্রিভুজ** (Triangle) বলে।

৪। যে-কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুকে (যে বিন্দুতে কোন দুই বাহু মিলিত হইয়াছে) **শিরঃ** বা **শীর্ষবিন্দু** (Vertex) বলা হয়। এবং সেই শীর্ষবিন্দুর বিপরীত বাহুকে **ভূমি** (Base) বলা হয়। যে স্থলে কোন ত্রিভুজে দুইটি বাহুর উল্লেখ থাকে, সেখানে অবশিষ্ট ভুজকে ভূমি বলা হয়। শীর্ষবিন্দুতে যে কোণ অবস্থিত, তাহাকে **শীর্ষকোণ** (Vertical angle) বলে। পার্শ্বস্থ চিত্রের A বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু, ∠BACকে শীর্ষকোণ এবং BC বাহুকে ভূমি বলা হয়।

A

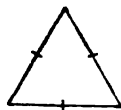
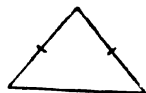
B C

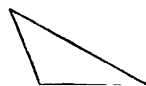
একটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ—তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ।

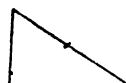
কখনও কখনও ত্রিভুজের তিনটি কোণ সম্পূর্ণভাবে BCA, CAB, ABC এরূপ না লিখিয়া সুবিধার জন্য শুধুমাত্র C, A, B অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়। এবং A কোণের বিপরীত বাহু BCকে a, B কোণের

বিপরীত বাহু ACকে b এবং C কোণের বিপরীত বাহু ABকে c দ্বারা জ্ঞাপন করা হয়।

৫। বাহু অনুযায়ী ত্রিভুজ তিন প্রকারের হয় :—

(১) যাহার তিন বাহুই পরস্পর সমান, তাহাকে **সমবাহু ত্রিভুজ** (Equilateral triangle) বলে।

(২) যাহার দুইটি বাহু পরস্পর সমান, তাহাকে **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ** (Isosceles triangle) বলে।

সাধারণত ইহার সমান বাহু দুইটির মিলন-বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলা হয়। সুতরাং তাহার বিপরীত বাহু অর্থাৎ অসমান বাহুটিকে ভূমি বলা হয়।

(৩) যাহার বাহুগুলি অসমান, তাহাকে **বিষমবাহু ত্রিভুজ** (Scalene triangle) বলে।

৬। কোণ অনুযায়ীও ত্রিভুজ তিন প্রকারের হয় :—

(১) যাহার একটি কোণ সমকোণ, তাহাকে **সমকোণী ত্রিভুজ** (Right-angled triangle) বলে।

সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহুকে **অতিভুজ** (Hypotenuse) বলে।

(২) যাহার একটি কোণ স্থূল কোণ, তাহাকে **স্থূলকোণী ত্রিভুজ** (Obtuse-angled triangle) বলে।

মন্তব্য : তোমরা পরে জানিতে পারিবে যে, কোন ত্রিভুজের একটির অধিক কোণ, সমকোণ বা স্থূল কোণ হইতে পারে না।

(৩) যাহার সমস্ত কোণগুলিই সূক্ষ্ম কোণ তাহাকে **সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ** (Acute-angled triangle) বলে।

৭। ত্রিভুজের প্রত্যেক কৌণিক বিন্দু হইতে তাহার বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু অবধি যে তিনটি সরল রেখা টানা যায়, তাহাদিগকে **মধ্যমা** (Median) বলে।

যে-কোন শীর্ষবিন্দু হইতে যদি ভূমির উপর লম্ব টানা যায়, তাহা হইলে এই লম্বকে ঐ শীর্ষবিন্দুর **উন্নতি** বা **উচ্চতা** (Altitude) বলে।

৮। একটি ক্ষেত্রকে যদি অপর একটি ক্ষেত্রের উপর যথাযথ স্থাপন করিলে তাহারা পরস্পর সর্বাঙ্গীন মিলিয়া যায়, তাহা হইলে এই দুইটি ক্ষেত্র সর্বতোভাবে সমান হইবে। যদি একটি ত্রিভুজকে আর একটি ত্রিভুজের উপর যথাযথভাবে স্থাপন করিলে তাহারা সর্বাঙ্গীন মিলিয়া যায়, তবে একের তিনটি বাহু এবং

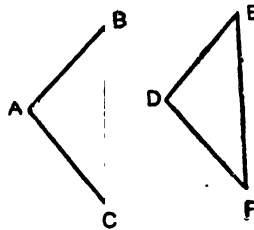
তিনটি কোণ অপরের তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণের সহিত পরস্পর সমান হইবে ; এবং ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফলও পরস্পর সমান হইবে। এই মিলিত বাহু ও মিলিত কোণগুলিকে যথাক্রমে **অনুরূপ বাহু** (Corresponding side) ও **অনুরূপ কোণ** (Corresponding angle) বলা হয়।

৯। ত্রিভুজের সর্বসমতা

একটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ অর্থাৎ তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ পরস্পর অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণের সমান হইলে ত্রিভুজ-দ্বয়কে **সর্বসম** বা **সর্বতোভাবে সমান** (Identically equal) বলা হয়।

৪র্থ উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।৪)

কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও তদন্তর্ভূত কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও তদন্তর্ভূত কোণের সহিত পরস্পর সমান হইলে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান হয়।

[If two sides and included angle of one triangle are respectively equal to two sides and included angle of the other, then the two triangles are equal in every respect.]

ABC, DEF দুইটি ত্রিভুজ ;

উহাদের AB = DE,

BC = EF

এবং অন্তর্ভূত ∠ABC = অন্তর্ভূত ∠DEF ;

প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

প্রমাণ। ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যাহাতে A বিন্দু D বিন্দুর উপর, এবং AB সরল রেখা DE সরল রেখার বরাবর পতিত হয়।

দেওয়া আছে, AB = DE ;

সুতরাং, B বিন্দু E বিন্দুর সহিত মিশিবে।

এবং যেহেতু, ∠ABC = ∠DEF,

সুতরাং BC সরল রেখা EF সরল রেখার বরাবর পড়িবে।

দেওয়া আছে, BC = EF,

সুতরাং, C বিন্দু F বিন্দুর সহিত মিলিবে।

দেখা যাইতেছে যে, A বিন্দু D বিন্দুর উপর পড়িয়াছে, এবং C বিন্দু F বিন্দুর সহিত মিশিয়াছে, সুতরাং AC সরল রেখা DF সরল রেখার সহিত মিশিয়াছে।

অতএব, ABC ত্রিভুজটি DEF ত্রিভুজের সহিত সর্বাঙ্গে মিলিয়া গিয়াছে।

সুতরাং তাহারা পরস্পর সর্বতোভাবে সমান।

দ্রষ্টব্য : উপরে দেওয়া আছে—

$$AB = DE,$$

$$BC = EF$$

এবং $\angle ABC = \angle DEF$;

প্রমাণিত হইল—

$$AC = DF,$$

$$\angle BAC = \angle EDF,$$

$$\angle ACB = \angle DFE$$

এবং ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = DEF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

উপরোক্ত প্রকারে একটির উপর আর একটি ক্ষেত্র আরোপ করিয়া প্রমাণ করাকে **উপরিপাত** বা **সমাপতন প্রমাণ** (Proof by superposition) বলে।

অনুশীলনী (২)

১। ABC একটি ত্রিভুজ। সরল রেখা BD, AC বাহুর মধ্যবিন্দুতে লম্ব। প্রমাণ কর AB = AC এবং ∠BAC = ∠BCA.

২। প্রমাণ কর সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের দ্বিখণ্ডক, তাহার ভূমির মধ্যবিন্দুতে লম্ব হইবে।

৩। একটি সমবাহু ত্রিভুজের সমবাহুগুলি যদি P, Q এবং R বিন্দুতে যথাক্রমে সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, PQR ত্রিভুজটিও একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

৪। প্রমাণ কর যে একটি সমবাহু বা সদৃশকোণী ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটিও পরস্পর সমান।

৫। উপরোক্ত উদাহরণে প্রমাণ কর, যে-কোন মধ্যমা তৎসংলগ্ন বাহুর উপর লম্ব হইয়াছে।

৬। যদি APB এবং AQC দুইটি সমান সরল রেখা হয় এবং AP = AQ, তবে প্রমাণ কর BQ = CP.

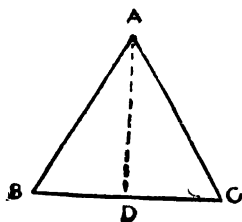
৭। দুইটি সরল রেখা উভয়ের মধ্যবিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, উহাদের যে-কোন প্রান্তদ্বয়ের সংযোজক রেখা, বিপরীত পার্শ্বস্থ প্রান্তদ্বয়ের সংযোজক রেখার সমান।

৮। ABC কোণের AB বাহু = BC বাহু। ABC কোণের সমদ্বিখণ্ডকারক রেখার মধ্যে D যে-কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, AD = CD.

৯। একটি সরল রেখার মধ্যবিন্দু হইতে যে লম্ব টানা যায় তন্মধ্যে যে-কোন বিন্দু ঐ সরল রেখার প্রান্ত-বিন্দু হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

৫ম উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।৫)

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণ দুইটি সমান হয়।

[In an isosceles triangle, the angles opposite to the equal sides are equal.]

ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, ইহার AB বাহু, AC বাহু সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle ACB = \angle ABC$.

মনে কর, AD সরল রেখা BAC কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BC বাহুর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল।

প্রমাণ : ABD, ACD ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে
AB = AC, দেওয়া আছে
AD দুই ত্রিভুজের সাধারণ বাহু
এবং $\angle BAD = \angle CAD$ (অঙ্কনসিদ্ধ)

সুতরাং ABD, ACD ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর সর্বতোভাবে সমান ;
(৪র্থ উপপাদ্য দ্রষ্টব্য)

অতএব, $\angle ACB = \angle ABC$.

অনু. ১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটিকে ভূমির উভয় পার্শ্বে বর্ধিত করিলে যে দুইটি বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তাহারা পরস্পর সমান ; যেহেতু তাহারা ভূমিস্থ সমান কোণ দুইটির সম্পূরক।

অনু. ২। যদি একটি ত্রিভুজ সমবাহু হয়, তাহা হইলে উহার কোণত্রয়ও পরস্পর সমান হইবে।

অনুশীলনী (৩)

১। একই ভূমি BCর উপর একই দিকে ABC, DBC দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁকা হইয়াছে। প্রমাণ কর, $\angle ABD = \angle ACD$.

২। উপরোক্ত ক্ষেত্রে যদি ত্রিভুজদ্বয় ভূমির একই দিকে অঙ্কন না করিয়া ভিন্ন দিকে অঙ্কন করা যায়, তবে পুনরায় প্রমাণ কর,

$$\angle ABD = \angle ACD ;$$

এবং AD যোগ করিয়া দেখাও যে AD সরল রেখা BCর দ্বিখণ্ডক লম্ব।

৩। ABC একটি সমদ্বিবাহু ($AB = AC$) ত্রিভুজ ; P, Q, R বিন্দুগুলি যথাক্রমে AB, BC, CA বাহুগুলির মধ্যবিন্দু ; PQ, PR, RQ সংযুক্ত কর। প্রমাণ কর—

(১) APR, PQR দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ;

(২) $\angle APQ = \angle ARQ$.

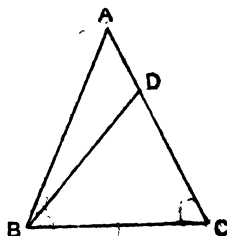
৪। ABC ত্রিভুজের $AB = AC$ এবং এই সমান বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D এবং E, DE, CD যোগ করিয়া প্রমাণ কর $\triangle DBC = \triangle EBC$.

৫। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু, ভূমির মধ্যবিন্দুর সহিত যোগ করা হইলে ঐ সরল রেখা শীর্ষকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৬। যদি চারিটি বাহুবিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে ঐ ক্ষেত্রটির বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

৬ষ্ঠ উপপাদ্য (ইউক্লিড, ১।৬)

যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে ঐ কোণদ্বয়ের বিপরীত বাহুদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

[If two angles of a triangle are equal, then the sides opposite to these angles are also equal.]

ABC ত্রিভুজটির ∠ACB = ∠ABC.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB = AC.

প্রমাণ : যদি AB সরল রেখা AC সরল রেখার সমান না হয়, তবে মনে কর যেন AC, AB অপেক্ষা বৃহত্তর; CA হইতে ABর সমান করিয়া CD কাটিয়া লও।

BD একটি সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত কর।

এক্ষণে, ABC, DBC ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

AB = DC,

BC সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূত ∠ABC = অন্তর্ভূত ∠DCB ; কাজেই, ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

ইহা অসম্ভব, কারণ অংশ সমগ্রের সমান হইতে পারে না।

অতএব, AB, ACর সমান হইবে।

অনু.। যদি একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণই পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

বিপরীত প্রতিজ্ঞা

আমরা জানি প্রতিজ্ঞার সাধারণ নির্বাচনের দুইটি অঙ্গ আছে: (১) **কল্পনা**—যে জ্যামিতিক সত্য দেওয়া থাকে, (২) **সিদ্ধান্ত**—ঐ কল্পনা হইতে যে সত্য সাধন করিতে হইবে।

এখন যদি দুইটি উপপাদ্য পরস্পর এরূপভাবে সম্পর্কিত হয় যে, যে-কোন একটির কল্পনা অপরটির সিদ্ধান্ত হয় (এবং একটির সিদ্ধান্ত অপরটির কল্পনা হয়), তবে তাহাদের একটিকে অপরটির **বিপরীত** (Converse) বলে। অর্থাৎ, প্রথম প্রতিজ্ঞায় যে জ্যামিতিক সত্য দেওয়া আছে, দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞায় যদি তাহা প্রমাণ করিতে হয়, এবং প্রথম প্রতিজ্ঞায় যাহা প্রমাণিত হইল, তাহাই যদি দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞায় দেওয়া জ্যামিতিক সত্য হয়, তবে তাহারা একে অন্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা হইবে।

এজন্য ৬ষ্ঠ উপপাদ্য ৫ম উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা।

কারণ, ৫ম উপপাদ্যে দেওয়া আছে $AB = AC$, (কল্পনা)

প্রমাণ করিতে হইবে $\angle ACB = \angle ABC$; (সিদ্ধান্ত)

৬ষ্ঠ উপপাদ্যে দেওয়া আছে $\angle ACB = \angle ABC$, (কল্পনা)

প্রমাণ করিতে হইবে $AB = AC$. (সিদ্ধান্ত)

অতএব স্পষ্টত ৫ম উপপাদ্যের কল্পনা ও সিদ্ধান্ত যথাক্রমে ৬ষ্ঠ উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত ও কল্পনা হইয়াছে।

৬ষ্ঠ উপপাদ্যে ৫ম উপপাদ্যের কল্পনা ও সিদ্ধান্ত স্থান পরিবর্তন করিয়াছে মাত্র।

অনুশীলনী (৪)

১। প্রমাণ কর একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডকদ্বয়, ভূমির সহিত আর একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সৃষ্টি করে।

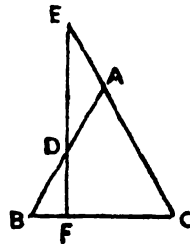
২। ABC একটি ত্রিভুজ এবং সরল রেখা AD ভূমি BCর মধ্যবিন্দুতে লম্ব। প্রমাণ কর, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

৩। ABC একটি ত্রিভুজ; $\angle ACB = \angle ABC$ এবং সরল রেখা AD, $\angle BAC$র দ্বিখণ্ডক এবং তাহা BC ভূমির D বিন্দুতে মিলিয়াছে। E, ADর উপর যে-কোন একটি বিন্দু, দেখাও যে BEC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

৪। ABC একটি ত্রিভুজ, ABর মধ্যবিন্দু X এর সহিত ACর মধ্যবিন্দু Y যোগ করা হইল এবং $\angle AXY = \angle AYX$ হইল। প্রমাণ করিতে হইবে ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

৫। কোন একটি ত্রিভুজের শীর্ষকোণ সমন্বিত দুইটি বাহু বর্ধিত করা হইল; উহারা যে দুই বহিঃকোণ সৃষ্টি করিল তাহারা যদি পরস্পর সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

৬। ABC ত্রিভুজের AB = AC; BC ভূমির উপর একটি লম্ব ABর মধ্যবিন্দু D এবং CAর বর্ধিত অংশের E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর AD = AE.

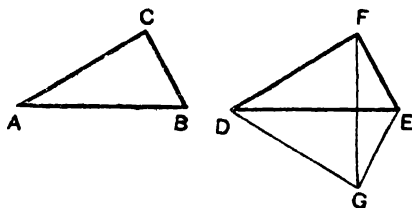
সঙ্কেত :—একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ ভিন্ন অপর কোণদ্বয় পরস্পর পূরক।

$\angle DEA$ অর্থাৎ $\angle DEC$, $\angle ACB$র পরিপূরক

এবং $\angle ADE = \angle BDF = \angle DBF$এর পরিপূরক

$\angle B = \angle C$; $\therefore$ $\angle DEA = \angle EDA$; $\therefore$ EA = DA.

৭ম উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।৮)

একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু অন্য একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সহিত সমান হইলে, ত্রিভুজ দুইটি পরস্পর সর্বতোভাবে সমান হইবে।

[If two triangles have the three sides of the one equal to the three sides of the other, each to each, then the triangles are equal in every respect.]

ABC, DEF ত্রিভুজের

AB = DE,

AC = DF

এবং BC = EF ;

প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজ দুইটি পরস্পর সর্বতোভাবে সমান।

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজটি DEF ত্রিভুজের উপর এমন করিয়া স্থাপন কর যাহাতে, A বিন্দুটি D বিন্দুর উপর, AB বাহু DE বাহুর বরাবর এবং ABC ত্রিভুজটি F বিন্দুর বিপরীত দিকে পড়ে।

যেহেতু, AB = DE,

∴ B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়িবে।

ABC ত্রিভুজটির নূতন অবস্থানে DEG নাম দেওয়া গেল।

কাজেই, AB = DE, AC = DG, এবং BC = EG.

FG যোগ কর।

এখন, DFG ত্রিভুজে, $DF = AC = DG$;

$\therefore \angle DFG = \angle DGF$ (৫ম উপঃ দ্রষ্টব্য)

আবার, EFG ত্রিভুজে, $EF = BC = EG$;

$\therefore \angle EFG = \angle EGF$

কাজেই সম্পূর্ণ $\angle DFE$ = সম্পূর্ণ $\angle DGE$

অর্থাৎ, $\angle DFE = \angle ACB$.

এখন, ABC, DEF ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

$AC = DF$ (দেওয়া আছে),

$BC = EF$ (দেওয়া আছে)

এবং $\angle ACB = \angle DFE$ (প্রমাণিত হইল) ;

$\therefore$ ABC, DEF ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর সর্বতোভাবে সমান।

দ্রষ্টব্য ১ : এই উপপাদ্যে দেওয়া আছে যে,

$AB = DE$,

$AC = DF$

এবং $BC = EF$;

প্রমাণিত হইল যে,

$\angle A = \angle D$,

$\angle B = \angle E$,

$\angle C = \angle F$

এবং ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = DEF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

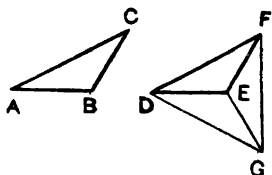
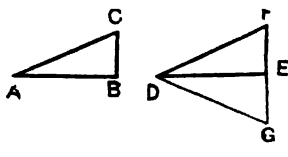
দ্রষ্টব্য ২ : আমরা উপরের চিত্র এমনভাবে লইয়াছি যাহাতে FG, $\angle DFE$ ও $\angle DGE$র মধ্যে পড়ে।

দুইটি অন্য ক্ষেত্রও হইতে পারে, যথা :

(১) FG, ∠DFE ও ∠DGEর বাহিরে পড়িতে পারে।

(নিম্নের ১নং চিত্র)

(২) FG, FE ও EGর সহিত মিশিয়া যাইতে পারে।

(নিম্নের ২নং চিত্র)

(১নং চিত্র) (২নং চিত্র)

তবে, উপরোক্ত দুইটি ক্ষেত্রেই স্থাপন করিবার জন্য বৃহত্তর বাহুটি ধরিয়া লইলে (যেমন ৭ম উপপাদ্যে করা হইয়াছে) বাহিরে পড়িবার বা মিশিয়া যাইবার সম্ভাবনা থাকিবে না।

অনুশীলনী (৫)

১। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর সহিত ভূমির মধ্যবিন্দু একটি সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত হইল; প্রমাণ কর, ঐ যোজক ভূমির উপর লম্ব হইয়াছে।

২। উপরোক্ত উদাহরণে প্রমাণ কর যে, ঐ যোজক শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক হইয়াছে।

৩। প্রমাণ কর যে, (১) সমান সমান ভূমির উপর যদি দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়, তবে তাহারা পরস্পর সর্বতোভাবে সমান হইবে; (২) যদি একই ভূমির বিপরীত দিকে দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়, তবে তাহারাও সর্বতোভাবে সমান হইবে।

৪। ABCD একটি চতুর্ভুজ (এমন সমতল ক্ষেত্র যাহার চারিটি বাহু আছে); AB বাহু = CD বাহু এবং AD বাহু = CB বাহু ; প্রমাণ কর, ∠ADC = ∠ABC.

৫। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে অপর দুই বাহুর মধ্যবিন্দুতে দুইটি সরল রেখা টানা হইল। প্রমাণ কর, এই রেখাদ্বয় পরস্পর সমান।

৬। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ; BO এবং CO, ∠B এবং ∠Cকে যথাক্রমে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে ; তাহারা O বিন্দুতে মিলিয়াছে। প্রমাণ কর, BO = CO. যদি AO যোগ করা হয়, প্রমাণ কর, AO, ∠BACর দ্বিখণ্ডক হইয়াছে।

৭। ABC একটি সমদ্বিবাহু (AB = AC) ত্রিভুজ ; ABকে D পর্যন্ত এবং ACকে E পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হইল যে, BD = CE হইল। এখন EB এবং DC যোগ করা হইল। প্রমাণ কর, EB = DC.

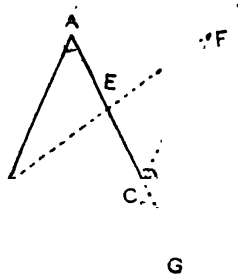
৮। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে সমান দূরে (১) ভূমির মধ্যে অবস্থিত দুই বিন্দু অথবা (২) উভয় দিকে বর্ধিত হইলে বহির্ভাগে অবস্থিত দুই বিন্দু, শীর্ষকোণ হইতে সমান দূরে অবস্থিত, প্রমাণ কর।

৯। একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ ভিন্ন অপর দুইটি কোণ পরস্পর সমান। উহার অতিভুজের মধ্যবিন্দু এবং সমকৌণিক বিন্দু সংযুক্ত করিলে যে দুইটি ত্রিভুজ হইবে উহারা সর্বতোভাবে সমান, প্রমাণ কর।

৮ম উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।১৬)

যদি একটি ত্রিভুজের কোন বাহু বর্ধিত করা হয়, তাহা হইলে বহিঃস্থ কোণটি অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের যে-কোনটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

[If one side of a triangle is produced, the exterior angle so formed is greater than either of the interior opposite angles.]

G

ABC ত্রিভুজের BC বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

ACD কোণ, BAC, ABC কোণদ্বয়ের যে-কোনটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

মনে কর, E, ACর মধ্যবিন্দু;

BE যোগ করিয়া F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর;

BE এবং EF সমান করিয়া লও;

CF যোগ কর।

প্রমাণ: AEB, CEF ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

AE = EC (অঙ্কনসিদ্ধ),

BE = EF (অঙ্কনসিদ্ধ)

এবং $\angle$AEB = বিপ্রতীপ $\angle$CEF ;

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর সর্বতোভাবে সমান।

$\therefore \quad \angle ECF = \angle EAB$ অর্থাৎ $\angle ACF = \angle BAC$;

কিন্তু $\angle ACD$, $\angle ACF$ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

$\therefore \quad \angle ACD$, $\angle BAC$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

এইরূপে ACকে G পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া, এবং Aকে BCর মধ্য-বিন্দুতে যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে $\angle BCG$, $\angle ABC$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

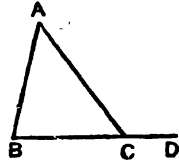
যেহেতু, $\angle ACD = \angle BCG$,

$\therefore \quad \angle ACD$, $\angle BAC$ বা $\angle ABC$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

অনু. ১। একটি ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি কোণ একত্রযোগে দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

$\angle ABC < \angle ACD$;

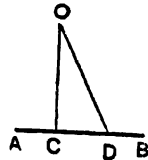
উভয় পার্শ্বে $\angle ACB$ যোগ কর।

তাহা হইলে—

$\angle ABC + \angle ACB < \angle ACD + \angle ACB$, অর্থাৎ দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

অনু. ২। একটি ত্রিভুজে অন্তত দুইটি সূক্ষ্ম কোণ থাকিবেই।

যেহেতু, উপরের অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে, যদি উহাতে একটি স্থূল কোণ থাকে, তাহা হইলে অন্য কোণ দুইটিই এক সমকোণের অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

অনু. ৩। বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি সরল রেখার উপর মাত্র একটিই লম্ব অঙ্কিত করা যায়।

যদি O হইতে OC, OD দুইটি লম্ব ABর উপর অঙ্কিত করা সম্ভব হইত, তাহা হইলে $\angle OCD$ ও $\angle ODC$ দুইটিই এক এক সমকোণের সমান হইত। ইহা অসম্ভব।

অনুশীলনী (৬)

১। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিকে বর্ধিত করিলে যে দুইটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হইবে, প্রমাণ কর, তাহারা প্রত্যেকে একটি স্থূল কোণ।

২। দেখাও যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় সূক্ষ্ম কোণ।

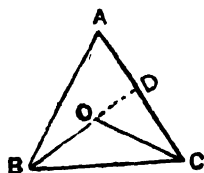
৩। দেখাও যে একটি ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের যোগফল দুই সমকোণের যোগফল অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

[**সঙ্কেত** : শীর্ষবিন্দুর সহিত ভূমির কোন বিন্দু যোগ কর। প্রথম অনুসিদ্ধান্তের প্রমাণ দ্রষ্টব্য।]

৪। যদি যে-কোন ত্রিভুজের যে-কোন বাহু উভয় দিকে বর্ধিত করা হয়, তবে প্রমাণ কর, যে দুইটি বহিঃকোণের সৃষ্টি হইল তাহাদের যোগফল দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

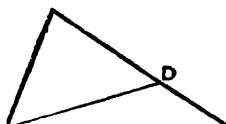
৫। একটি সরল রেখা দেওয়া আছে ; প্রমাণ করিতে হইবে যে এই সরল রেখার উপর বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে দুইএর অধিক সমান সরল রেখা টানা যায় না।

৬। ABC ত্রিভুজের মধ্যে যে-কোন বিন্দু Oর সহিত B এবং C যোগ কর। প্রমাণ কর যে BOC কোণ BAC কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

[**সঙ্কেত** : BOকে বর্ধিত করিয়া ACর সহিত Dবিন্দুতে মিলাও। $\angle BOC > \angle ODC$, আবার $\angle ODC$, $\angle BAC$ হইতে বড়।]

৭। ABC ত্রিভুজে ভূমির কোণদ্বয় সমান, এই দুইটি কোণ BO এবং CO দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। এখন BOকে বর্ধিত করা হইলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় উহা ABC ত্রিভুজের যে-কোন একটি ভূমিস্থ কোণের সমান।

৯ম উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।১৮)

একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু অসমান হইলে বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If two sides of a triangle are not equal, the greater side has the greater angle opposite to it.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের AC বাহু, AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর ;

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

∠ABC, ∠ACB অপেক্ষা বৃহত্তর।

AC হইতে ABর সহিত সমান করিয়া AD কাটিয়া লও ;

BD যোগ কর।

প্রমাণ : ABD ত্রিভুজের AB, AD বাহুদ্বয় সমান,

অতএব ∠ABD = ∠ADB ;

কিন্তু ∠ADB, অন্তঃস্থ বিপরীত ∠ACB হইতে বৃহত্তর ;

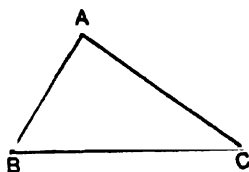
অতএব, ∠ABD, ∠ACB হইতে বৃহত্তর ;

কিন্তু, ∠ABC, ∠ABD হইতে বৃহত্তর ;

সুতরাং ∠ABC, ∠ACB হইতে নিশ্চয়ই বৃহত্তর।

১০ম উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ১।১৯)

একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ অসমান হইলে বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If two angles of a triangle are not equal, the greater angle has the greater side opposite to it.]

ABC একটি ত্রিভুজ।

ইহার $\angle ABC$, $\angle ACB$ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ : যদি AC, AB অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়,

তাহা হইলে AC, ABর সমান।

অথবা, AC, AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

যদি AC ও AB সমান হয়,

তাহা হইলে, $\angle ABC = \angle ACB$;

কিন্তু দেওয়া আছে,

$\angle ABC$, $\angle ACB$ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

কাজেই, $\angle ABC = \angle ACB$, হইতে পারে না ;

অর্থাৎ $AC = AB$, হইতে পারে না।

আর যদি AC, AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়,

তাহা হইলে ∠ABC, ∠ACB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;

কিন্তু দেওয়া আছে,

∠ABC, ∠ACB অপেক্ষা বৃহত্তর ;

কাজেই, ∠ABC, ∠ACB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না,

অর্থাৎ AC, AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না।

অতএব, যেহেতু AC = AB হইতে পারে না,

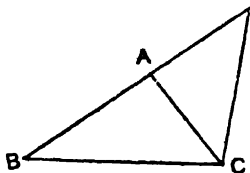
বা AC AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না,

∴ AC, AB অপেক্ষা বৃহত্তর।

দ্রষ্টব্য: ৫ম ও ৯ম এবং ৬ষ্ঠ ও ১০ম উপপাদ্যগুলির নির্বচন মিলাইয়া দেখ, কোন ত্রিভুজের (১) দুই বাহু সমান বা অসমান হইলে উহাদের বিপরীত কোণ দুইটিও সমান অথবা অসমান হইবে, এবং (২) দুই কোণ সমান বা অসমান হইলে উহাদের বিপরীত বাহু দুইটিও সমান অথবা অসমান হইবে।

১১শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।২০)

কোন ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি বাহু একত্রযোগে অপর বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

[Any two sides of a triangle are together greater than the third side.]

ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ইহার যে-কোন দুইটি বাহুর যোগফল তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

অর্থাৎ BA ও AC একত্রযোগে CB অপেক্ষা বৃহত্তর,

AB ও BC একত্রযোগে CA অপেক্ষা বৃহত্তর

এবং BC ও CA একত্রযোগে AB অপেক্ষা বৃহত্তর।

BAকে D অবধি বর্ধিত কর,

AD, ACর সমান করিয়া লও,

DC যোগ কর।

প্রমাণ : যেহেতু $AD = AC$,

অতএব, $\angle ACD = \angle ADC$

কিন্তু, $\angle BCD$, $\angle ACD$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

অতএব, $\angle BCD$, $\angle ADC$ অর্থাৎ $\angle BDC$ অপেক্ষা বৃহত্তর;

অতএব, BDC ত্রিভুজ হইতে পাওয়া যায় যে

BD, CB হইতে বৃহত্তর ;

কিন্তু, $BD = BA + AD = BA + AC$;

অতএব, BA ও AC একত্রযোগে CB অপেক্ষা বৃহত্তর।

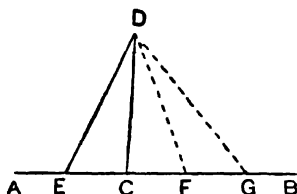
এইরূপে প্রমাণ করা যাইবে যে,

$AB + BC$, CA অপেক্ষা বৃহত্তর

এবং $BC + CA$, AB অপেক্ষা বৃহত্তর।

১২শ উপপাদ্য

একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি সরল রেখার উপর যে কয়েকটি সরল রেখা টানা যাইবে তন্মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

[Of all straight lines drawn from a given point to a given straight line, the perpendicular is the least.]

D একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB একটি সরল রেখা, DC, ABর উপর লম্ব টানা হইয়াছে এবং DE, D বিন্দু হইতে ABর উপর অন্য একটি সরল রেখা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে DC, DE অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

প্রমাণ: DCE ত্রিভুজের, ∠DCE একটি সমকোণ ;

অতএব, ∠DEC এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর (৮ম উপঃ অনুঃ)

অর্থাৎ ∠DEC, ∠DCE অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;

∴ DC, DE অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। (১০ম উপঃ)

অনু. ১। বিপরীত প্রতিজ্ঞা : D বিন্দু হইতে AB সরল রেখা পর্যন্ত যত রেখা টানা যায় তন্মধ্যে যদি DC ক্ষুদ্রতম হয়, তাহা হইলে উহা ABর উপর লম্ব।

অনু. ২। D বিন্দু হইতে আর একটি সরল রেখা ABকে CEর সমান দূরে E বিন্দুর বিপরীত দিকে F বিন্দুতে কাটিল ; প্রমাণ কর যে DF ও DE সমান।

অনু. ৩। CG > CF হইলে প্রমাণ কর যে DG > DF.

সংজ্ঞা

১। চারিটি সরল রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নাম **চতুর্ভুজ** (Quadrilateral).

২। চতুর্ভুজের বিপরীত দুই শীর্ষবিন্দুর যোজকের নাম **কর্ণ** (Diagonal).

অনুশীলনী (৭)

(ত্রিভুজের অসমানতা সম্বন্ধীয়)

১। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু (বৃহত্তম কোণের বিপরীত বাহুই বৃহত্তম)।

২। স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূল কোণের বিপরীত বাহুই বৃহত্তম বাহু।

৩। একটি ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু অন্য দুই বাহুর সহিত মিলিত হইয়া দুইটি সূক্ষ্ম কোণ সৃজন করিবে।

৪। একটি ত্রিভুজের কোন বাহুর প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে দুইটি সরল রেখা ত্রিভুজের মধ্যস্থিত কোন বিন্দুর সহিত যোগ করা হইল। প্রমাণ কর, এই দুই মধ্যবর্তী সরল রেখা একত্রে অন্য দুই বাহুর যোগফল অপেক্ষা ছোট।

৫। যদি কোন ত্রিভুজের এক বাহু অন্য বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে সেই ক্ষুদ্রতর বাহুর সম্মুখীন কোণ সূক্ষ্ম কোণ হইবে।

৬। BAC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, BC তাহার ভূমি। BCকে কোন একটি বিন্দু D পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। AD যোগ কর। প্রমাণ কর, AD সমান বাহুদ্বয় AB, AC হইতে বড়।

৭। বাহু বর্ধিত না করিয়া ১১শ উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।

৮। ABC ত্রিভুজের BC ভূমির মধ্যবিন্দু D হইতে শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত DA সরল রেখা টানা হইয়াছে। যদি AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে BAD কোণ CAD কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

৯। ABC ত্রিভুজের যদি AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়, তবে প্রমাণ কর, কোন সরল রেখা শীর্ষবিন্দু A হইতে BC ভূমি পর্যন্ত টানা হইলে, তাহা AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

১০। ABC ত্রিভুজের ∠ABC এবং ∠ACBকে যথাক্রমে OB এবং OC সরল রেখাদ্বয় দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। প্রমাণ কর যদি AB, AC অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে OB, OC অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

•১১। প্রমাণ কর, যে-কোন ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর বিয়োগ-ফলের দৈর্ঘ্য তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

[**সঙ্কেত :** ABC ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু BC এবং ক্ষুদ্রতম বাহু CA. আমরা জানি $BA+AC>BC$. প্রমাণ করিতে হইবে $BC-BA<CA$. বৃহত্তম BC হইতে BA কাটিয়া লও। এখন প্রমাণ কর CD, AC হইতে ক্ষুদ্রতর।]

১২। একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর পরিমাণ যথাক্রমে 2″ এবং 3″. প্রমাণ কর যে তৃতীয় বাহুর পরিমাণ 5″ হইতে কম এবং 1″ হইতে অধিক।

•১৩। যে-কোন ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর যোগসমষ্টি তৃতীয় বাহু সংযোজক মধ্যমার দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

[**সঙ্কেত :** ABC ত্রিভুজের BH একটি মধ্যমা যাহা ভূমি BCকে দ্বিখণ্ডিত করিতেছে। AHকে F পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া $AH=HF$ কর। CF যোগ কর। সুতরাং $AB=CF$ হইল। অতএব $BA+AC=AC+CF>AF>2AH$.]

•১৪। যে-কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের যোগসমষ্টি (পরিমিতি) উহার মধ্যমাত্রয়ের যোগসমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

১৫। ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুত্রয় হইতে ত্রিভুজের মধ্যে অপর কোন বিন্দু পর্যন্ত তিনটি সরল রেখা টানা হইল; প্রমাণ কর উহাদের যোগসমষ্টি

(১) তিন বাহুর যোগসমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

(২) তিন বাহুর যোগসমষ্টির অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর।

১৬। কোন চতুর্ভুজের চারি বাহুর যোগসমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের যোগসমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

১৭। ABC একটি ত্রিভুজের শীর্ষকোণ BACর দ্বিখণ্ডক BC ভূমির X বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর BA, BX অপেক্ষা বৃহত্তর এবং CA, CX অপেক্ষা বৃহত্তর।

উপরোক্ত উপায়ে আমরা ১১শ উপপাদ্যের একটি প্রমাণ পাইতে পারি।

১৮। ABCD একটি চতুর্ভুজ; P যে-কোন বিন্দু লও, প্রমাণ কর চারি বাহুর যোগফল P বিন্দুর সহিত যে-কোন কৌণিক বিন্দুর সংযোজক চারি সরল রেখার যোগফল হইতে ক্ষুদ্রতর। এই সত্যটির কি কোন ব্যতিক্রম আছে? যদি থাকে কোন্ ক্ষেত্রে উপস্থিত হইবে?

১৯। ABCD একটি চতুর্ভুজ। উহার AC কর্ণের উপর B ও D বিন্দু হইতে BE ও DF লম্ব অঙ্কিত হইয়াছে, এবং BD কর্ণের উপর A ও C বিন্দু হইতে AG ও CH লম্ব অঙ্কিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে $BE+DF+AG+CH<AC+BD$.

২০। কোন চতুর্ভুজের যে-কোন তিনটি বাহু একত্রযোগে চতুর্থ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

২১। ABCD একটি চতুর্ভুজ, AD বৃহত্তম বাহু এবং BC ক্ষুদ্রতম বাহু। প্রমাণ কর $\angle C$, $\angle A$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

চতুর্থ অধ্যায়

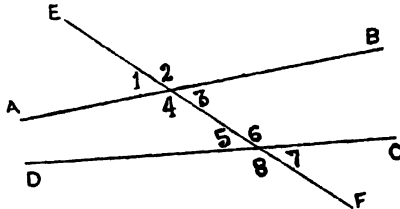
সমান্তরাল সরল রেখা

যে সকল সরল রেখা একই সমতলে অবস্থিত থাকিয়া উভয় দিকে উত্তরোত্তর বাধিত করিলে কখনই পরস্পর মিলিত হয় না, তাহাদিগকে **সমান্তরাল সরল রেখা** (Parallel straight lines) বলা হয়।

AB, CD এখানে সমান্তরাল সরল রেখা।

সমান্তরাল সরল রেখার পরস্পর একাভিমুখীন যে সমস্ত সরল রেখা বিভিন্ন সমতলে অবস্থিত থাকিয়া, উভয় দিকে উত্তরোত্তর বর্ধিত করিলে কখনই পরস্পর মিলিত হয় না, তাহারা পরস্পর সমান্তরাল হইবে না। কারণ সমান্তরাল রেখাগুলির একই সমতলে অবস্থিত থাকা চাই। এই কারণে একটি টেবিলের উপর ও মেঝের উপর যদি তুইটি সরল রেখা এইরূপভাবে থাকে যে তাহাদের যদিচ্ছা বর্ধিত করিলেও পরস্পর মিলিত না হয়, তবে তাহারা সমান্তরাল সরল রেখা হইবে না।

যে সরল রেখা তুই কিংবা ততোধিক নির্দিষ্ট সরল রেখাকে ছেদ করে, তাহাকে **ছেদক** (Transversal) বলে।

নিম্নস্থ চিত্রে EF ছেদক।

কোন ছেদক দুই সরল রেখাকে ছেদ করিলে সর্বশুদ্ধ আটটি কোণ উৎপন্ন হয়। পরস্পর প্রভেদ দর্শনার্থ এই আটটি কোণকে বিশেষ বিশেষ নামে অভিহিত করা হয়। তন্মধ্যে (চিত্র দেখ)—

(১) 1, 2, 7, 8 কোণগুলি **বহিঃকোণ** (exterior angles),

(২) 3, 4, 5, 6 কোণগুলি **অন্তঃকোণ** (interior angles),

(৩) 4 ও 6 এবং তদ্রূপ 3 ও 5 **একান্তর কোণ** (alternate angles),

(৪) 3 ও 6 কোণ দুইটি এবং তদ্রূপ 4 ও 5 কোণদ্বয় EF ছেদকের **একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ** (interior angles on the same side),

(৫) 2 ও 6 কোণদ্বয়কে **অনুরূপ কোণ** (corresponding angles) বলে ; ইহাদের 2কে বহিঃকোণ এবং 6কে EFএর **একই পার্শ্বস্থ বিপরীত অন্তঃকোণ** (interior opposite angle on the same side) বলে। তদ্রূপ 1 ও 5, 8 ও 4, 7 ও 3 কোণযুগল অনুরূপ কোণ।

প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ

দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরল রেখার প্রত্যেকেই অপর একটি সরল রেখার সমান্তরাল হইতে পারে না।

সুতরাং একটি বিন্দু দিয়া কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তরাল একটি মাত্র সরল রেখা টানা যায়।

দ্রষ্টব্য : উপরোক্ত স্বতঃসিদ্ধটি খুব সরল নহে। এ কারণ অনেক গণিতজ্ঞ এই স্বতঃসিদ্ধটি না ধরিয়া লইয়া জ্যামিতি শাস্ত্র রচনা করিয়াছেন। এই পুস্তকে অবশ্য এই স্বতঃসিদ্ধটিকে মানিয়া লওয়া হইয়াছে। তাহা না করিলে জ্যামিতি ছাত্রদের পক্ষে অযথা জটিল হইবে।

১৩শ উপপাদ্য (ইউক্লিড, ১৷২৭, ১৷২৮)

যদি একটি সরল রেখা অন্য দুইটি সরল রেখাকে ছেদ করিলে

(১) একান্তর কোণ সমান হয়,

বা (২) ছেদক রেখার এক পার্শ্বস্থ বহিঃস্থ কোণটি বিপরীত অন্তঃস্থ কোণটির সমান হয়,

বা (৩) এক পার্শ্বস্থ অন্তঃস্থ কোণদ্বয় একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান হয়,

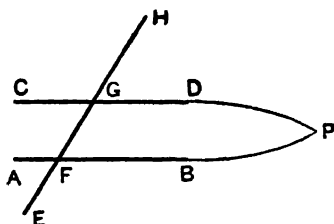
তাহা হইলে উপরোক্ত সকল ক্ষেত্রেই সরল রেখা দুইটি সমান্তর হইবে।

[If a straight line cutting two other straight lines. makes

(1) the alternate angles equal,

or (2) an exterior angle equal to the interior opposite angle on the same side of the cutting line,

or (3) the interior angles on the same side equal to two right angles,

then in all the above cases, the two straight lines are parallel.]

(১) EFGH সরল রেখাটি AB, CD সরল রেখাদ্বয়কে এমনভাবে ছেদ করিল, যাহাতে $\angle CGF$ = একান্তর $\angle GFB$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে CD, AB সমান্তর।

প্রমাণ : যদি CD, AB সমান্তর না হয়, তাহা হইলে C, A বা D, B প্রান্ত হইতে বর্ধিত করিলে উহারা একটি বিন্দুতে মিলিবে।

মনে কর D, B প্রান্ত হইতে বর্ধিত হওয়ায় উহারা P বিন্দুতে মিলিয়াছে।

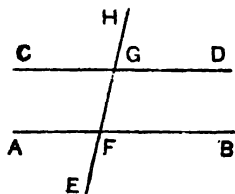
এখন PGF একটি ত্রিভুজ, ইহার PG বাহু C পর্যন্ত বর্ধিত।

অতএব বহিঃস্থ ∠CGF, অন্তঃস্থ ∠GFP অর্থাৎ ∠GFB অপেক্ষা বৃহত্তর,

কিন্তু দেওয়া আছে ∠CGF = ∠GFB ;

সুতরাং AB ও CDকে B ও D প্রান্তে বর্ধিত করিলে তাহারা মিলিতে পারে না।

এইরূপে দেখান যায় যে A, C প্রান্ত হইতে বর্ধিত হইলেও তাহারা মিলিতে পারে না।

অর্থাৎ CD, AB সমান্তর না হইয়া পারে না।

(২) মনে কর বহিঃস্থ ∠HGD = অন্তঃস্থ বিপরীত ∠GFB.

প্রমাণ করিতে হইবে যে CD, AB সমান্তর।

প্রমাণ : যেহেতু ∠CGF = বিপ্রতীপ ∠HGD

এবং ∠HGD = ∠GFB (দেওয়া আছে),

অতএব ∠CGF = ∠GFB ;

আর, ইহারা একান্তর কোণ,

সুতরাং CD, AB সমান্তর।

(৩) মনে কর, $\angle DGF + \angle GFB =$ তুই সমকোণ;

প্রমাণ করিতে হইবে যে CD, AB সমান্তর।

প্রমাণ : যেহেতু $\angle CGF + \angle DGF =$ তুই সমকোণ

এবং $\angle DGF + \angle GFB =$ তুই সমকোণ (দেওয়া আছে),

স্বতরাং $\angle CGF + \angle DGF = \angle DGF + \angle GFB$;

উভয় পার্শ্ব হইতে সাধারণ কোণটি বাদ দিলে,

$\angle CGF = \angle GFB$;

আর, ইহারা একান্তর কোণ,

অতএব, CD, AB সমান্তর।

১৪শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।২৯)

একটি সরল রেখা কোন দুইটি সমান্তর সরল রেখাকে ছেদ করিলে

(১) একান্তর কোণগুলি সমান হইবে ;

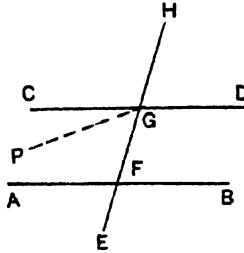
(২) এক পার্শ্বস্থ বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণের সমান হইবে ;

এবং (৩) এক পার্শ্বস্থ অন্তঃস্থ কোণদ্বয় একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান হইবে।

[If a straight line cuts two parallel straight lines, it makes,

(i) the alternate angles equal to one another,

(ii) the exterior angle equal to the interior opposite angle on the same side of the cutting line,

and (iii) the two interior angles on the same side together equal to two right angles.]

AB, CD সমান্তর সরল রেখাদ্বয়কে EFGH সরল রেখা ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

(১) ∠CGF = একান্তর ∠GFB ;

(২) বহিঃস্থ ∠HGD = অন্তঃস্থ এক পার্শ্বস্থ বিপরীত ∠GFB ;

এবং (৩) অন্তঃস্থ কোণদ্বয় DGF, GFB একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান।

প্রমাণ : (১) যদি $\angle CGF$, $\angle GFB$র সমান না হয়, তবে মনে কর যেন, $\angle CGF$, $\angle GFB$ অপেক্ষা বৃহত্তর ; $\angle CGF$ হইতে $\angle GFB$র সমান করিয়া $\angle PGF$ কাটিয়া লও।

ইহারা একান্তর কোণ,

সুতরাং PG ও AB সমান্তর (১৩শ উপঃ)

অর্থাৎ, প্রতিচ্ছেদকারী সরল রেখাদ্বয় CD, PG উভয়েই ABর সমান্তর, ইহা অসম্ভব। (প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ)

অতএব, $\angle CGF$, $\angle GFB$র সহিত অসমান হইতে পারে না

অর্থাৎ $\angle CGF = \angle GFB$;

(২) আবার, যেহেতু $\angle CGF = \angle GFB$ (প্রমাণিত হইল)

এবং $\angle CGF =$ বিপ্রতীপ $\angle HGD$,

অতএব, $\angle HGD = \angle GFB$;

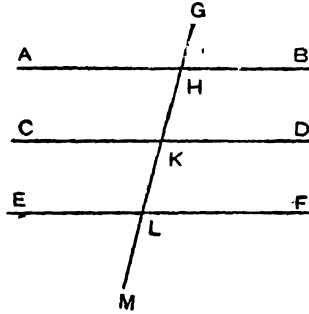
(৩) আবার, যেহেতু $\angle HGD = \angle GFB$ (প্রমাণিত হইল)

এবং $\angle HGD$ ও $\angle DGF$ একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান ;

অতএব, $\angle DGF$, $\angle GFB$ একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান।

১৫শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।৩০)

কয়েকটি সরল রেখা যদি অন্য কোন সরল রেখার সহিত সমান্তর হয়, তাহা হইলে উহারাও পরস্পর সমান্তর।

[Straight lines which are parallel to the same straight line are parallel to one another.]

AB ও CD সরল রেখাদ্বয় EF এর সহিত সমান্তর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB, CD পরস্পর সমান্তর।

মনে কর GM সরল রেখা AB, CD ও EFকে যথাক্রমে H, K, L বিন্দুতে ছেদ করিল।

যেহেতু AB, EF সমান্তর, এবং GM উহাদিগকে ছেদ করিতেছে,

∴ ∠AHL = একান্তর ∠HLF ;

এবং যেহেতু CD ও EF সমান্তর, এবং GM উহাদিগকে ছেদ করিতেছে,

∴ ∠HKD = অন্তঃস্থ বিপরীত ∠KLF

অতএব, ∠AHK = ∠HKD ;

আর, ইহারা একান্তর কোণ,

সুতরাং, AB ও CD সমান্তর।

অনুশীলনী (৮)

১। একটি সরল রেখার উপর তুই বা ততোধিক লম্ব পাত করিলে, তাহারা পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

২। যদি কোন চতুর্ভুজের চারিটি কোণই সমকোণ হয়, তবে ঐ চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র (যাহার বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল এবং কোণগুলি সমকোণ)।

৩। সমান সরল রেখা AB, CD পরস্পর ছেদ করিয়াছে ; প্রমাণ কর AC, BD যোগ করিলে তাহারা সমান্তরাল হইবে।

৪। যে-কোন কোণের বাহুদ্বয় যথাক্রমে অন্য এক কোণের বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল হইয়াছে ; প্রমাণ কর ঐ কোণদ্বয় পরস্পর সমান অথবা সম্পূরক হইবে।

৫। একটি সরল রেখা তুই বা ততোধিক সমান্তর সরল রেখাকে ছেদ করিয়াছে। যদি উহা একটির উপর লম্ব হইয়া থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, উহা সকল সমান্তরাল রেখার উপরই লম্ব হইয়াছে।

৬। যদি একটি সরল রেখা কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির সহিত সমান্তরাল করিয়া টানা হয়, তবে উহা অপর বাহুদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

৭। কোন কোণের দ্বিখণ্ডকের উপর কোন বিন্দু হইতে যে-কোন একটি বাহুর সমান্তরাল এক সরল রেখা টানিলে উহা এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সৃষ্টি করিবে।

৮। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। BC উহার ভূমি। O, BC ভূমির উপর একটি বিন্দু। O বিন্দু হইতে, OP একটি সরল রেখা ABর সমান্তরাল করিয়া টানা হইল। উহা ACকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর OPC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

৯। যদি কোন ত্রিভুজের কোন বহিঃকোণের দ্বিখণ্ডক তাহার বিপরীত বাহুর সমান্তরাল হয় তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

১০। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমিস্থ D বিন্দু হইতে ভূমির উপর একটি লম্ব টানা হইল; ঐ লম্ব AB এবং বর্ধিত CAকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে উৎপন্ন APQ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

১১। AB, CD দুইটি সরল রেখা O বিন্দুতে পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। প্রমাণ কর যে AC, DB সমান্তর।

১২। প্রমাণ কর (১) কোন দুই সমান্তরাল রেখার একান্তর কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল, (২) কোন দুই সমান্তরাল রেখার বহিঃস্থ কোণ ও অন্তঃস্থ বিপরীত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

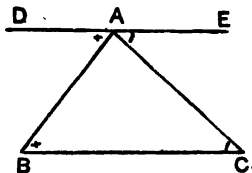
১৩। কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডকের কোন বিন্দু হইতে যদি দুইটি সরল-রেখা ঐ কোণের বাহুদ্বয়ের সহিত সমান্তরাল করিয়া টানা যায় এবং তাহারা কোণের বাহুদ্বয়ে মিলিত হয়, তবে ঐ দুই সরল রেখা পরস্পর সমান হইবে। এবং তথায় একটি রম্বস্ সৃষ্টি হইবে (রম্বসের সমান্তরাল বাহুগুলি পরস্পর সমান, বিপরীত কোণগুলি সমান, কিন্তু সমকোণ নহে)।

১৪। AB, CD সরল রেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। সন্নিহিত কোণগুলি সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া দুইটি সরল রেখা টানা হইল। CDর উপর কোন বিন্দু P লও। P বিন্দু দিয়া RPQ একটি সরল রেখা ABর সমান্তরাল করিয়া টান। ঐ সমান্তরাল রেখা সন্নিহিত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের R এবং Qতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর PR = PQ.

১৫। ১৫শ উপপাদ্য প্লেফেয়ার সাহেবের স্বতঃসিদ্ধ সাহায্যে প্রমাণ কর.

১৬শ উপপাদ্য (ইউক্লিড, ১।৩২)

একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান।

[The sum of the three angles of a triangle are equal to two right angles.]

ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC =$ দুই সমকোণ।

মনে কর A বিন্দুর মধ্য দিয়া DAE, BCর সমান্তর করিয়া টানা হইল।

প্রমাণ : যেহেতু DAE ও BC সমান্তর এবং AB ও AC উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে,

অতএব $\angle DAB =$ একান্তর $\angle ABC$

এবং $\angle EAC =$ একান্তর $\angle ACB$;

তাহা হইলে, $\angle DAB + \angle EAC = \angle ABC + \angle ACB$;

উভয় পার্শ্বে $\angle BAC$ যোগ কর ;

অতএব $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC$

$= \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$

$=$ দুই সমকোণ (১ম উপঃ)

১৬শ উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত

১। $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

২। দুইটি ত্রিভুজের একের দুইটি কোণ অপরের দুইটি কোণের সহিত সমান হইলে, তৃতীয় কোণটি অন্যের তৃতীয় কোণের সমান হইবে।

৩। সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্ম কোণ দুইটি পরস্পর পরিপূরক।

৪। একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের যোগফল অন্য কোণটির সহিত সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে।

৫। একটি চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

সংজ্ঞা

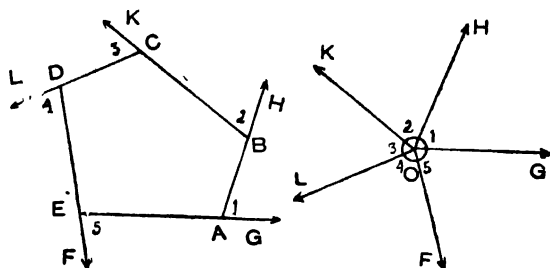
১। চারিটির অধিক (অর্থাৎ পাঁচ বা ততোধিক) সরল রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বহুভুজ** (Polygon) বলে।

২। কোন বহুভুজের বাহুগুলি সমান হইলে তাহাকে **সমবাহু** (Equilateral) বহুভুজ বলে।

৩। কোন সমবাহু বহুভুজের কোণগুলি সমান হইলে তাহাকে **সুষম** (Regular) বহুভুজ বলে।

১৭শ উপপাদ্য

যদি একটি প্রবৃদ্ধকোণহীন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলি একই দিকে যথাক্রমে বর্ধিত করা যায়, তাহা হইলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণগুলি চারি সমকোণের সমান হইবে।

[If the sides of a convex rectilineal figure are produced in order, the sum of the exterior angles so formed is equal to four right angles.]

ABCDE একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র। ইহার বাহুগুলি যথাক্রমে একই দিকে G, H, K, L, F বিন্দুতে বর্ধিত করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, বহিঃস্থ কোণগুলির সমষ্টি = 4 সমকোণ।

O বিন্দুতে OH, OK, OL, OF ও OG যথাক্রমে AB, BC, CD, DE ও EAর সমান্তর করিয়া উহাদের একই দিকে টানা হইয়াছে।

প্রমাণ : যেহেতু AG, BH যথাক্রমে OG ও OHএর সমান্তর এবং উহারা একই দিকে টানা হইয়াছে, অতএব $\angle BAG = \angle HOG$. এইরূপে উভয়টির 2, 3, 4, 5 চিহ্নিত কোণগুলি সমান।

$\therefore\ \angle CBH + \angle DCK + \angle EDL + \angle AEF + \angle BAG$
$= \angle KOH + \angle LOK + \angle FOL + \angle GOF + \angle HOG$
= 4 সমকোণ।

মন্তব্য : উপরের উপপাদ্যে বাহুসংখ্যা যতই হউক না কেন, বহিঃস্থ কোণগুলির সমষ্টি চারি সমকোণ হইবেই। আবার ঋজুরেখ ক্ষেত্রটি সুষম হইলে, উহার প্রত্যেক কোণের পরিমাণ নিম্নোক্ত উপায়ে বাহির করা যায় :—

$$\text{একটি সুষম বহুভুজের প্রত্যেক বহিঃস্থ কোণ} = \frac{4 \text{ সমকোণ}}{\text{বাহুসংখ্যা}}$$

$$= \frac{360^\circ}{\text{বাহুসংখ্যা}} = \frac{360^\circ}{n} \text{ (বাহুসংখ্যা যদি } n \text{ হয়)}$$

১ম উদাহরণ। একটি সুষম ষড়ভুজের (ছয় বাহুবিশিষ্ট বহুভুজ) প্রত্যেকটি বহিঃস্থ কোণের ও অন্তঃস্থকোণের পরিমাণ কত ?

সুষম বহুভুজের অন্তঃস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান, কাজেই বহিঃস্থ কোণগুলিও অন্তঃস্থ কোণের সম্পূরক বলিয়া পরস্পর সমান।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় বহিঃস্থ কোণ} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ ;$$

$$\therefore \text{ অন্তঃস্থ কোণ} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

২য় উদাহরণ। একটি সুষম বহুভুজের একটি বহিঃস্থ কোণের পরিমাণ 60°, উহার বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

$$\text{বহিঃস্থ কোণ} = \frac{360^\circ}{\text{বাহুসংখ্যা}}$$

$$\text{অথবা } 60^\circ = \frac{360^\circ}{\text{বাহুসংখ্যা}}$$

$$\therefore \text{ বাহুসংখ্যা} = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6.$$

৩য় উদাহরণ। একটি সুষম বহুভুজের অন্তঃস্থ কোণের পরিমাণ 120° ; উহার বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

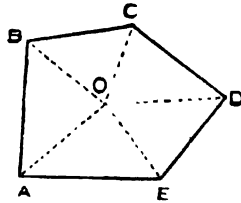
$$\text{অন্তস্থঃ কোণ} = 120^\circ,$$

$$\therefore \text{ বহিঃস্থ কোণ} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ ,$$

$$\therefore \text{ বাহুসংখ্যা} = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6.$$

১৮শ উপপাদ্য

একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের অন্তঃস্থ কোণগুলি এবং চারিটি সমকোণের যোগফল উক্ত ক্ষেত্রের বাহুগুলির দ্বিগুণ-সংখ্যক সমকোণের সমান।

[The sum of the interior angles of any rectilineal figure together with four right angles is equal to twice as many right angles as the figure has sides.]

ABCDE একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র। ইহার 5টি বাহু আছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

অন্তঃস্থ কোণগুলি + 4 সমকোণ

= 5 × 2 সমকোণ

ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির মধ্যে O যে-কোন একটি বিন্দু লও।

AO, BO, CO, DO এবং EO সংযুক্ত কর।

প্রমাণ: যেহেতু ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির 5টি বাহু আছে, অতএব 5টি ত্রিভুজ পাওয়া গেল। আমরা জানি, প্রত্যেক ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণগুলির সমষ্টি = 2 সমকোণ।

এখন 5টি ত্রিভুজের কোণগুলির সমষ্টি = ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির অন্তঃস্থ (A, B, C, D এবং E) কোণগুলির সমষ্টি + O বিন্দুতে স্থিত কোণগুলির সমষ্টি।

কিন্তু O বিন্দুতে স্থিত কোণগুলি = 4 সমকোণ

∴ ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির অন্তঃস্থ কোণগুলির সমষ্টি + 4 সমকোণ
= 5 × 2 সমকোণ।

মন্তব্য : যদি ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির n সংখ্যক বাহু থাকে, তাহা হইলে n সংখ্যক ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে। এবং উপরের উপপাদ্য অনুযায়ী, ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির অন্তঃস্থ কোণগুলির সমষ্টি + 4 সমকোণ = $2n$ সমকোণ

অথবা, ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির অন্তঃস্থ কোণগুলির সমষ্টি = $(2n-4)$ সমকোণ
$= (2n-4) \times 90° = (n-2) \times 180°$

আবার, ঐ ঋজুরেখ ক্ষেত্রটি যদি সুষম হয়, তবে উহার প্রত্যেক

$$\text{অন্তঃস্থ কোণ} = \frac{(\text{ঐ সুষম বহুভুজের বাহুসংখ্যা} \times 2 - 4) \text{ সমকোণ}}{\text{ঐ সুষম বহুভুজের বাহুসংখ্যা}}$$

$$= \frac{(2n-4) \text{ সমকোণ}}{n}$$ [যেখানে n = ঐ সুষমের বাহুসংখ্যা]

$$= \frac{(n-2) \times 180°}{n},$$

১ম উদাহরণ। একটি ষড়ভুজের (ছয় বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের) অন্তঃস্থ কোণগুলির যোগফল বাহির কর।

নির্ণেয় অন্তঃস্থ কোণগুলির যোগফল = (বাহুসংখ্যা × 2 − 4) সমকোণ
$= (6 \times 2 - 4) \times 90° = 8 \times 90° = 720°.$

২য় উদাহরণ। যদি কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের কোণগুলির যোগফল 8 সমকোণ হয়, তবে উহার বাহুসংখ্যা কত ?

অন্তঃস্থ কোণগুলির যোগফল $=$(নির্ণেয় বাহুসংখ্যা $\times 2-4$) সমকোণ
$=8$ সমকোণ

অথবা, নির্ণেয় বাহুসংখ্যা $\times 2=8+4$

অথবা, নির্ণেয় বাহুসংখ্যা $=\frac{12}{2}=6.$

৩য় উদাহরণ। একটি সুষম অষ্টভুজের (আট বাহুবিশিষ্ট বহুভুজ) প্রত্যেকটি অন্তঃস্থ কোণের পরিমাণ কত ?

$$\text{নির্ণেয় অন্তঃস্থ কোণ}=\frac{(\text{উহার বাহুসংখ্যা}\times 2-4)\text{ সমকোণ}}{\text{উহার বাহুসংখ্যা}}$$

$$=\frac{(8\times 2-4)\text{ সমকোণ}}{8}=\frac{12\text{ সমকোণ}}{8}$$

$$=\frac{12\times 90^\circ}{8}=135^\circ.$$

অনুশীলনী (৯)

১। নিম্নলিখিত ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ বাহির কর :—

(১) সমবাহু ত্রিভুজ.

(২) সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ,

(৩) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যাহার শীর্ষকোণ 60°,

(৪) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যাহার শীর্ষকোণ ভূমিকোণের দ্বিগুণ,

(৫) কোন ত্রিভুজ যাহার ভূমিসংলগ্ন বহিঃকোণদ্বয় যথাক্রমে 125° এবং 120°,

(৬) কোন ত্রিভুজ যাহার ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের যোগফল 108° এবং বিয়োগফল 12°.

২। ABC ত্রিভুজের BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর। CE ABর সমান্তর করিয়া টান। এখন ১৬শ উপপাদ্য প্রমাণ কর।

৩। ১৬শ উপপাদ্য সাহায্যে ৮ম উপপাদ্য প্রমাণ কর।

৪। চতুর্ভুজের কোণগুলির যোগফল চারি সমকোণ, দেখাও।

[**সঙ্কেত:** একটি কর্ণ টানিলে চতুর্ভুজটি দুইটি ত্রিভুজে পরিণত হইবে।]

৫। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর লম্ব পাত করা হইল। প্রমাণ কর যে সমকোণী ত্রিভুজ যে দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত হইল তাহারা প্রত্যেকে (১) সমকোণী ত্রিভুজ, (২) পরস্পরের সহিত সদৃশকোণ হইল।

৬। যদি কোন ত্রিভুজের ভূমিকে দুই দিকে বর্ধিত করা হয় এবং ঐ দুই বহিঃকোণ পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

৭। কোন ত্রিভুজের ভূমিকে উভয় দিকে বর্ধিত করিয়া বহিঃস্থ কোণ দুইটির যোগফল হইতে শীর্ষকোণটি বিয়োগ করিলে বিয়োগফল দুই সমকোণের সমান হইবে।

৮। প্রমাণ কর, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক ভূমির সমান্তরাল।

৯। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের A শীর্ষবিন্দু; BAকে শীর্ষবিন্দুর দিকে D পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হইয়াছে যে তাহাতে AD, AB সমান হইয়াছে। CD সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ কর BCD কোণটি সমকোণ।

১০। সমকোণী ত্রিভুজের এক সূক্ষ্ম কোণ অপর সূক্ষ্ম কোণের দ্বিগুণ হইলে, অতিভুজ ক্ষুদ্রতম বাহুর দ্বিগুণ হইবে।

১১। প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি সূক্ষ্ম কোণ।

১২। চতুর্ভুজের যে-কোন দুইটি সন্নিহিত কোণের সমদ্বিখণ্ডকারক রেখার অন্তর্ভূত কোণ অবশিষ্ট কোণ দুইটির সমষ্টির অর্ধেক।

১৩। যে সুষম বহুভুজের প্রত্যেক কোণ 108°, তাহার বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

১৪। সমবাহু ষড়ভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

১৫। কোন সুষম বহুভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করায় ঐ বহিঃ-কোণের পরিমাণ 90° ডিগ্রি হইল; এই বহুভুজের বাহুসংখ্যা বাহির কর। উহার প্রত্যেক অন্তঃকোণের পরিমাণই বা কত ডিগ্রি?

১৬। ABCD একটি চতুর্ভুজ। ইহার B, C, D কোণগুলি যথাক্রমে 2A, 3A এবং 4A হইলে A কোণের পরিমাণ কত ডিগ্রি? অপর কোণগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর।

১৭। ABC একটি ত্রিভুজ; উহার $\angle ABC$ এবং $\angle ACB$, BO ও CO দ্বারা যথাক্রমে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিয়া দেখাও যে $\angle BOC = 90^\circ + \frac{\angle CAB}{2}$.

১৮। ABC একটি ত্রিভুজ; উহার AB এবং AC বাহু-দ্বয়কে X এবং Y পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া B এবং C-তে অবস্থিত বহিঃস্থ কোণ দুইটিকে BO এবং CO দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর।

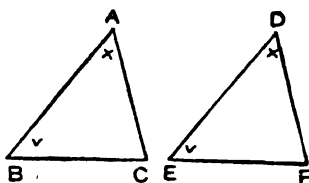
এখন প্রমাণ করিয়া দেখাও যে $\angle BOC = 90^\circ - \frac{\angle CAB}{2}$.

১৯। একটি সুষম ষড়ভুজের দুইটি সন্নিহিত কোণের সমদ্বিখণ্ডকারক রেখা দ্বারা উৎপন্ন কোণের পরিমাণ কত?

২০। একটি সুষম বহুভুজের যে-কোন দুইটি সন্নিহিত অন্তঃস্থ কোণের সমদ্বিখণ্ডকারক রেখা দ্বারা উৎপন্ন কোণের পরিমাণ 60° হইলে, ঐ সুষম বহুভুজের বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

১৯শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।২৬)

যদি দুইটি ত্রিভুজের একের দুই কোণ ও একটি বাহু, যথাক্রমে অন্যটির দুই কোণ ও অনুরূপ বাহুর সহিত সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

[If two angles and a side of one triangle are respectively equal to two angles and the corresponding side of another, the two triangles are equal in all respects.]

ABC, DEF দুইটি ত্রিভুজ ; ইহাদের

$\angle A = \angle D,$

$\angle B = \angle E$

এবং AC বাহু = অনুরূপ বাহু DF,

প্রমাণ করিতে হইবে যে ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বতো-ভাবে সমান।

প্রমাণ : $\angle A + \angle B + \angle C =$ দুই সমকোণ

$= \angle D + \angle E + \angle F$;

কিন্তু $\angle A = \angle D$ ও $\angle B = \angle E$ (দেওয়া আছে)

$\therefore \angle C = \angle F.$

এখন $\triangle$ABCকে $\triangle$DEFএর উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যাহাতে A বিন্দু D বিন্দুর উপর পড়ে এবং AC বাহু DF বাহুর বরাবর পড়ে।

তাহা হইলে C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে, ($\because$ AC = DF)

AB, DEর বরাবর পড়িবে, (যেহেতু $\angle A = \angle D$)

এবং CB, FEর বরাবর পড়িবে, (যেহেতু $\angle C = \angle F$)

এখন যেহেতু, AB, DEর বরাবর এবং CB, FEর বরাবর পড়ে,

$\therefore$ B নিশ্চয়ই Eর সহিত মিলিয়া যাইবে।

$\therefore$ ABC ত্রিভুজটি DEF ত্রিভুজের সহিত মিলিয়া যাইবে।

$\therefore$ ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

অনুশীলনী (১০)

১। কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপরে অবস্থিত যে-কোন বিন্দু ঐ কোণের বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী থাকিবে।

২। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক যদি উহার ভূমির উপর লম্ব হইয়া থাকে, তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

৩। যদি কোন ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে বিপরীত বাহু দুইটির উপর দুইটি লম্ব পাত করা যায় এবং ঐ লম্বদ্বয় পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

৪। ABCD একটি চতুর্ভুজ। AC কর্ণ, A কোণ এবং C কোণ উভয়কেই সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $\angle B = \angle D$ এবং AC, BDকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে এবং ঐ স্থানে সমকোণের সৃষ্টি করিয়াছে।

৫। একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান ও একটি কোণ $60°$; প্রমাণ কর, ত্রিভুজটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

ত্রিভুজের সর্বসমতা সম্বন্ধে জ্ঞাতব্য বিষয়

পূর্বে আলোচিত হইয়াছে যে একটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ—তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ, এবং ৪র্থ, ৭ম ও ১৯শ উপপাদ্যে প্রমাণিত হইয়াছে, একটি ত্রিভুজের নিম্নোক্ত তিনটি অঙ্গ অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ অঙ্গের সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে :—

(১) দুইটি বাহু ও তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ (৪র্থ উপাপাদ্য)

(২) তিনটি বাহু (৭ম উপপাদ্য)

(৩) দুইটি কোণ ও একটি অনুরূপ বাহু (১৯শ উপপাদ্য)

দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র—একটি ত্রিভুজের যে-কোন তিনটি অঙ্গ অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ তিনটি অঙ্গের সমান হইলেও ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান নাও হইতে পারে, এইরূপ হইলে তাহাকে সর্বসমতার **দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র** (Ambiguous Case) বলে। যেমন,

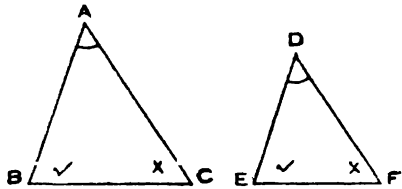
১। একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমান হইলেও ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম নাও হইতে পারে ; যেমন,

পার্শ্বস্থ ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

$\angle B = \angle E$

$\angle A = \angle D$

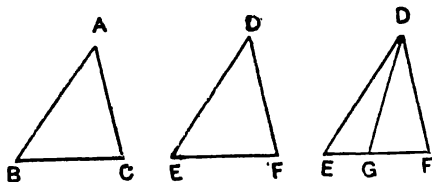
এবং $\angle C = \angle F$

কিন্তু ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম নহে।

২। দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির দুই বাহু ও একটি সমান বাহুর সম্মুখীন কোণ যদি অপরটির অনুরূপ অঙ্গের সমান হয় তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান নাও হইতে পারে। (পরবর্তী ২০শ উপপাদ্য দ্রষ্টব্য)

কিন্তু যদি সম্মুখীন কোণটি স্থূল কোণ বা সমকোণ হয় তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান হইবে। (পরবর্তী ২১শ উপপাদ্য দ্রষ্টব্য)

২০শ উপপাদ্য

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুইটি বাহু যথাক্রমে অপরটির দুইটি বাহুর সহিত সমান হয় এবং সমান বাহু দুইটির বিপরীত কোণ দুইটি সমান হয়, তাহা হইলে অপর দুইটি সমান বাহুর বিপরীত কোণ দুইটি সমান অথবা সম্পূরক হইবে।

[If two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each, and also the angles equal, which are opposite to one pair of equal sides, the angles opposite to the other pair of equal sides are either equal or supplementary.

(১নং চিত্র) (২নং চিত্র) (৩নং চিত্র)

ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটির

AB = DE, AC = DF এবং ∠ABC = ∠DEF.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ACB, DFE কোণদ্বয় সমান অথবা সম্পূরক।

প্রমাণ : অন্তর্গত ∠A, অন্তর্গত ∠Dর সমান বা অসমান হইবে।

(১নং ও ২নং চিত্র) প্রথম, মনে কর ∠A = ∠D.

ABC ত্রিভুজটিকে DEF ত্রিভুজের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর, যাহাতে A বিন্দু D বিন্দুর উপর পড়ে, এবং AB, DEর বরাবর পড়ে।

B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়িবে, কারণ, AB = DE.

এবং BC, EFএর বরাবর পড়িবে, কারণ, ∠ABC = ∠DEF.

আর, C বিন্দু CF বা CF বর্ধিত হইলে তাহার উপর পড়িবে।

যদি $\angle A = \angle D$, C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে ;

$\therefore$ BC, EFএর সহিত মিলিয়া যাইবে ;

অতএব ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান, এবং $\angle ACB = \angle EFD$.

(১নং ও ৩নং চিত্র) যদি $\angle A$, $\angle D$র অসমান হয়,

মনে কর, C বিন্দু EFএর G বিন্দুর উপর পড়িল ;

এখন $AC = DF$,

$\therefore \quad DG = DF$;

$\therefore \quad \angle DFG = \angle DGF$.

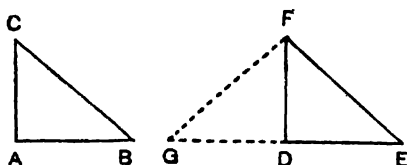
কিন্তু $\angle DGF$, $\angle DGE$র সম্পূরক ;

$\therefore \quad \angle DFE$, $\angle DGE$র সম্পূরক

অর্থাৎ $\angle DFE$, $\angle ACB$র সম্পূরক।

২১শ উপপাদ্য

যদি একটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি ভুজ এবং অতিভুজ যথাক্রমে অন্য একটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি ভুজ এবং অতিভুজের সহিত সমান হয়, তাহা হইলে ঐ ত্রিভুজ দুইটি পরস্পর সর্বতোভাবে সমান।

[If two right angled triangles have their hypotenuses equal and one other side of the one, equal to one other side of the other, then the triangles are equal in all respects.]

ABC, DEF দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের

∠A ও ∠D সমকোণ,

অতিভুজ CB = অতিভুজ FE

এবং AC বাহু = DF বাহু ;

প্রমাণ করিতে হইবে যে ABC, DEF ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর সর্বতোভাবে সমান।

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজটি DEF ত্রিভুজটির উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যাহাতে A বিন্দু, D বিন্দুর উপর, AC, DF এর বরাবর এবং B, E র বিপরীত দিকে পড়ে।

এই নূতন অবস্থানে ABC ত্রিভুজের DGF নাম দেওয়া গেল।

যেহেতু AC = DF,

∴ C, F এর উপর পড়িবে।

যেহেতু, FDG এবং FDE দুইটি সমকোণ এবং সন্নিহিত,

অতএব, GD ও DE একই সরল রেখায় অবস্থিত।

অতএব, FGE একটি ত্রিভুজ।

যেহেতু, $FE = CB = FG$;

$\therefore \quad \angle FED = \angle FGD$;

কিন্তু, $\angle FGD = \angle CBA$;

$\therefore \quad \angle FED = \angle CBA$;

এখন, ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

$\angle CAB = \angle FDE$ (দেওয়া আছে),

$\angle CBA = \angle FED$ (প্রমাণিত হইল)

এবং AC বাহু = DF বাহু ;

অতএব, ABC, DEF ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর সর্বতোভাবে সমান।

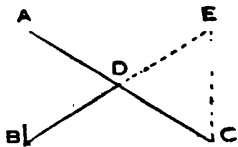
অনুশীলনী (১১)

১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর পতিত লম্ব, ত্রিভুজের ভূমি এবং শীরঃকোণ উভয়কেই সমদ্বিখণ্ডিত করে।

২। P বিন্দু AB এবং AC সরল রেখা হইতে সমান দূরে অবস্থিত ; যদি AP যোগ করা যায়, তবে প্রমাণ কর AP, $\angle BAC$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

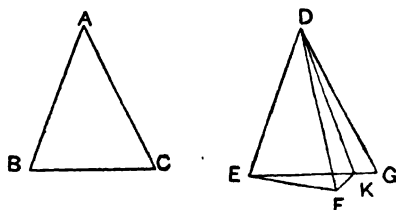
৩। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু এবং সমকৌণিক বিন্দুর সংযোজক রেখা অতিভুজের অর্ধেকের সমান।

সঙ্কেত : ABC সমকোণী ত্রিভুজের D, অতিভুজ ACর মধ্যবিন্দু। BD যোগ করিয়া E পর্যন্ত বর্ধিত কর। BD এবং DE সমান করিয়া লও। EC যোগ কর।

A E D B C

এখন প্রমাণ কর, $AC = BE$; $\therefore \ \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} BE = BD$.

২২শ উপপাদ্য

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুইটি বাহু অন্যটির দুইটি বাহুর সমান হয়, কিন্তু ঐ দুইটি বাহুর অন্তর্ভূ্ত কোণ অসমান হয়, তাহা হইলে উহাদের ভূমি অসমান হইবে এবং বৃহত্তর কোণবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভূমি ক্ষুদ্রতর কোণবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each, but the included angles unequal then their bases are unequal, the base of that which has the greater angle being greater than the base of the other.]

ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটির

AB = DE,

AC = DF,

কিন্তু অন্তর্ভূ্ত ∠BAC > অন্তর্ভূ্ত ∠EDF ;

প্রমাণ করিতে হইবে যে BC ভূমি > EF ভূমি।

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজটিকে DEF ত্রিভুজের উপর এমনভাবে স্থাপন কর, যাহাতে A বিন্দু D বিন্দুর উপর পড়ে এবং AB বাহু DE বাহুর বরাবর পড়ে। তাহা হইলে B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়িবে ; কারণ, AB = DE.

যেহেতু, $\angle BAC > \angle EDF$,

AC বাহু DFএর বাহিরে পড়িবে ;

AC এবং BC এস্থলে যথাক্রমে DG ও EG হইল।

(১) যদি EG, EFএর উপর দিয়া যায়, তাহা হইলে $EG > EF$.

(২) কিন্তু যদি তাহা না যায়, তবে মনে কর DK, $\angle FDG$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে এবং DK, EGকে K বিন্দুতে ছেদ করিল।

FK যোগ কর।

FDK ও GDK ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

$FD = GD$,

DK সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূত $\angle FDK =$ অন্তর্ভূত $\angle GDK$;

$\therefore \quad KF = KG$.

আবার, EFK ত্রিভুজে

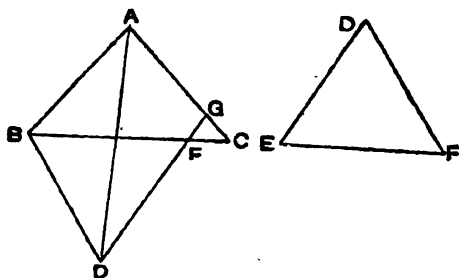
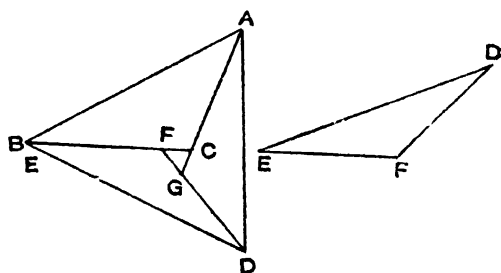
$EK + KF > EF$;

কিন্তু $EK + KF = EG$;

$\therefore$ EG (বা BC) $> EF$.

২৩শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।২৫)

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুইটি বাহু অন্যটির দুইটি বাহুর সমান হয়, কিন্তু উহাদের ভূমি অসমান হয়, তাহা হইলে যে ত্রিভুজটির ভূমি বৃহত্তর তাহার অপর দুইটি বাহুর অন্তর্ভূত কোণ অন্য ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each, but the bases unequal, then the angle contained by the sides of the one which has the grater base is greater than the angle contained by the sides of the other.]

(১নং চিত্র)

(২নং চিত্র)

ABC, DEF দুইটি ত্রিভুজ ; ইহাদের

$AB = DE$,

$AC = DF$,

কিন্তু $BC > EF$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle BAC > \angle EDF$.

* **প্রথম প্রমাণ :** DEF ত্রিভুজটিকে ABC ত্রিভুজের উপর এমনভাবে স্থাপন কর যাহাতে E বিন্দু, B বিন্দুর উপর পড়ে, EF, BCর বরাবর পড়ে এবং ED, A বিন্দুর বিপরীত দিকে BAর একমুখীন হইয়া পড়ে। AD যোগ কর।

AC বর্ধিত করিয়া FDকে G বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন $BA = ED = BD$,

$\therefore \quad \angle BAD = \angle BDA$.

আবার (১নং চিত্র), DG, DF বা AC হইতে বৃহত্তর, তাহা হইলে AG অপেক্ষাও বৃহত্তর ;

$\therefore \quad \angle DAG$, $\angle ADG$ অপেক্ষা বৃহত্তর,

$\therefore \quad \angle BAG$, $\angle BDG$ অপেক্ষা বৃহত্তর,

অর্থাৎ, $\angle BAC$, $\angle EDF$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

পুনরায় (২নং চিত্র), একই রূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$\angle ADG$, $\angle DAG$ অপেক্ষা বৃহত্তর,

$\therefore \quad \angle BAG$, $\angle BDG$ অপেক্ষা বৃহত্তর,

অর্থাৎ $\angle BAC$, $\angle EDF$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

---

* উক্ত প্রমাণটি স্যার আশুতোষ মুখোপাধ্যায় ১৮৭৫ খ্রীস্টাব্দে মাত্র ১১ বৎসর বয়সের সময় আবিষ্কার করেন।

দ্বিতীয় প্রমাণ : যদি ∠BAC, ∠EDF অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়, তাহা হইলে

(১) ∠BAC ও ∠EDF সমান,

অথবা (২) ∠BAC, ∠EDF অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

(১) কিন্তু যদি ∠BAC ও ∠EDF সমান হয়, তাহা হইলে ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান ;

∴ BC = EF ;

কিন্তু ইহা অনুমানের বিপরীত।

(২) আবার যদি ∠BAC, ∠EDF অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তাহা হইলে

BC, EF অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;

কিন্তু ইহাও অনুমানের বিপরীত;

অতএব, দেখা যাইতেছে, ∠BAC, ∠EDF অপেক্ষা ক্ষুদ্রতরও নহে বা উহার সমানও নহে ;

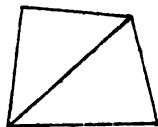
অর্থাৎ, ∠BAC, ∠EDF অপেক্ষা বৃহত্তর।

পঞ্চম অধ্যায়

ঋজুরেখ ক্ষেত্র—বহুভুজ

সরল রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র নানা প্রকারের হয়। ত্রিভুজও সরল রেখা দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্র; এখানে অন্যান্য এই প্রকার ক্ষেত্রের সংজ্ঞা ও বিবরণ দেওয়া হইতেছে।

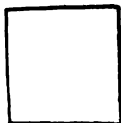
১। চারিটি সরল রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের নাম **চতুর্ভুজ** (Quadrilateral).

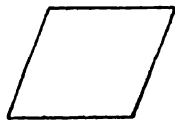
চতুর্ভুজের বিপরীত দুই শীর্ষবিন্দুর যোজকের নাম **কর্ণ** (Diagonal).

২। যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল, তাহার নাম **সামান্তরিক** (Parallelogram).

৩। যে চতুর্ভুজের মাত্র দুইটি বিপরীত বাহু সমান্তরাল তাহার নাম **ট্রাপিজিয়ম** (Trapezium).

৪। যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ, তাহার নাম **আয়তক্ষেত্র** (Rectangle).

(পরে দেখান হইবে যে, ইহার সকল কোণ সমকোণ)

৫। যে সামান্তরিকের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং সকল কোণগুলিও সমান তাহার নাম **বর্গক্ষেত্র** (Square)।

(ইহার কোণগুলি সমকোণ, তাহা পরে দেখান হইবে)

৬। যে সামান্তরিকের বাহুগুলি পরস্পর সমান কিন্তু কোণগুলি সমকোণ নহে, তাহার নাম **রম্বস্** (Rhombus).

৭। পাঁচ বা ততোধিক সরল রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বহুভুজ** (Polygon) বলে।

৮। কোন বহুভুজের বাহুগুলি যদি সমান হয়, তবে তাহাকে **সমবাহু** (Equilateral) বহুভুজ বলে।

৯। কোন সমবাহু বহুভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান হইলে তাহাকে **সুষম** (Regular) বহুভুজ বলে।

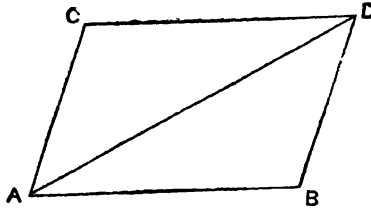
বাহুর সংখ্যানুযায়ী বহুভুজের বিভিন্ন নামকরণ

(ক) পাঁচটি বাহুবিশিষ্ট.........**পঞ্চভুজ** (Pentagon)
(খ) ছয়টি " **ষড়ভুজ** (Hexagon)
(গ) সাতটি " **সপ্তভুজ** (Heptagon)
(ঘ) আটটি " **অষ্টভুজ** (Octagon)
(ঙ) নয়টি " **নবভুজ** (Nonagon)
(চ) দশটি " **দশভুজ** (Decagon)

ইত্যাদি।

২৪শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।৩৩)

দুইটি সমান ও সমান্তর সরল রেখার একই পার্শ্বস্থ দুই প্রান্ত যোগকারী সরল রেখা দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তর।

[The straight lines which join the extremities of two equal and parallel straight lines towards the same parts are themselves equal and parallel.]

AB, CD দুইটি সমান ও সমান্তর সরল রেখা, AC ও BD উহাদের একই দিকের প্রান্তভাগ যোগ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AC, BD সমান ও সমান্তর।

AD যোগ কর।

প্রমাণ : CD ও AB সমান্তর,

এবং DA উহাদের সহিত মিলিয়াছে ;

∴ $\angle$CDA = একান্তর $\angle$DAB

এখন CDA, DAB ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

CD = AB ; DA সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূত $\angle$CDA = অন্তর্ভূত $\angle$DAB

অতএব, ত্রিভুজ দুইটি পরস্পর সর্বতোভাবে সমান ;

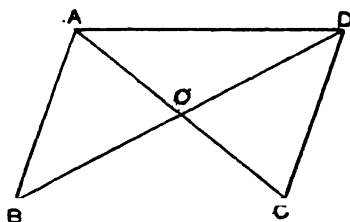
∴ AC = BD

এবং $\angle$CAD = $\angle$BDA, আর উহারা একান্তর কোণ ;

∴ AC ও BD সমান্তর অর্থাৎ উহারা সমান্তর ও সমান।

২৫শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।৩৪)

একটি সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি ও কোণগুলি সমান, প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিকটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[The opposite sides and angles of a parallelogram are equal to one another, each diagonal bisects the parallelogram and the diagonals bisect one another.]

ABCD একটি সামান্তরিক।

AC, BD উহার দুইটি কর্ণ, উহারা O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) $AD = BC$, $AB = CD$;

(২) $\angle DAB = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle ABC$;

(৩) AC, BD প্রত্যেকে সামান্তরিকটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে

এবং (৪) AC, BD পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ: ADC, ABC ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

$\angle DAC$ = একান্তর $\angle ACB$ (১৩শ উপঃ)

$\angle DCA$ = একান্তর $\angle CAB$

এবং AC সাধারণ বাহু ;

অত এব, ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

∴ $AD = BC$, $AB = CD$

এবং $\angle ADC = \angle ABC$

এবং ADC ও ABC ত্রিভুজ দুইটি আয়তনে সমান,

অর্থাৎ AC, সামান্তরিকটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

আবার, যেহেতু $\angle DAC = \angle ACB$ (প্রমাণিত)

এবং $\angle BAC = \angle ACD$

∴ সমগ্র $\angle DAB$ = সমগ্র $\angle DCB$.

এইরূপে, প্রমাণ করা যায় যে $\angle ABC = \angle ADC$

এবং DAB ও BCD ত্রিভুজ দুইটি আয়তনে সমান

অর্থাৎ BD সামান্তরিকটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

সুতরাং প্রমাণিত হইল যে,

(১) $AD = BC$, $AB = CD$;

(২) $\angle DAB = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle ABC$;

(৩) AC, BD প্রত্যেকে সামান্তরিকটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে

এবং (৪) AOB, COD ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

$\angle OAB$ = একান্তর $\angle OCD$,

$\angle OBA$ = একান্তর $\angle ODC$

এবং $AB = CD$, প্রমাণিত হইয়াছে

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান ;

∴ $OA = OC$, এবং $OB = OD$

অর্থাৎ AC, BD পরস্পর পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

অনু. ১। সামান্তরিকের কোন একটি কোণ সমকোণ হইলে, ইহার সকল কোণই সমকোণ, অর্থাৎ ইহা একটি সমকোণী চতুর্ভুজ।

অনু. ২। একটি বর্গের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং ইহার সকল কোণই সমকোণ।

অনুশীলনী (১২)

১। যদি কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান হয়, তাহা হইলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক।

২। যদি কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি সমান হয়, তাহা হইলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক।

৩। যদি কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহা হইলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক।

৪। রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৫। যদি কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান হয়, তাহা হইলে সামান্তরিকটি সমকোণী হইবে (আয়তক্ষেত্র)।

৬। কোন সামান্তরিকের বিপরীত কোণের সমদ্বিখণ্ডক টানিলে উহারা পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হইবে বা একই সরল রেখায় অবস্থিত হইবে।

৭। সামান্তরিকের কোন একটি কোণ ও তাহার অব্যবহিত পরবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক সরল রেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

৮। কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া একটি সরল রেখা টানা হইল এবং তাহা সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয়ের সহিত মিলিত হইল; প্রমাণ কর যে রেখাটি উক্ত বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইল।

৯। কোন সামান্তরিকের দুই বিপরীত শীর্ষবিন্দু হইতে কর্ণের উপর লম্ব পাত করিলে তাহারা পরস্পর সমান হয়।

১০। যদি কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হয় এবং পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে, তবে উহা একটি বর্গক্ষেত্র হইবে।

১১। যদি কোন সামান্তরিকের কর্ণ বিপরীত কোণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে উহা একটি রম্বস্ হইবে।

১২। ABCD একটি সামান্তরিক ; X, Y, উহার AD এবং BC বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়। AYCX ক্ষেত্রটি যে একটি সামান্তরিক, তাহা প্রমাণ কর।

১৩। ABCD একটি চতুর্ভুজ। AB বাহু, DC বাহুর সহিত সমান্তরাল ; AD, BC সমান কিন্তু সমান্তরাল নহে।

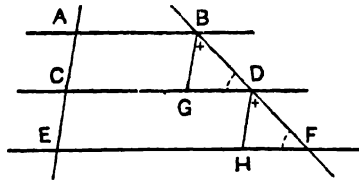
প্রমাণ কর—

(১) $\angle A + \angle C = 180° = \angle B + \angle D$

(২) কর্ণ AC = কর্ণ BD.

২৬শ উপপাদ্য

তিন বা ততোধিক সমান্তর রেখার ছেদকের প্রতিচ্ছেদগুলি যদি সমান হয়, তাহা হইলে উহাদের অপর কোন ছেদক রেখার প্রতিচ্ছেদগুলিও সমান হইবে।

[If there are three or more parallel straight lines and the intercepts made by them on any straight line that cuts them are equal, then the corresponding intercepts on any other straight line that cuts them are also equal.]

AB, CD, EF সমান্তর তিনটি রেখা; ACE ও BDF সরল রেখাদ্বয় তাহাদিগকে যথাক্রমে A, C, E, এবং B, D, F বিন্দুতে ছেদ করিল। মনে কর, AC = CE.

প্রমাণ করিতে হইবে যে BD = DF.

B ও D বিন্দু হইতে ACE সরল রেখার সমান্তর করিয়া BG ও DH দুইটি সরল রেখা টান। উহারা যথাক্রমে CD ও EF সরল রেখায় G ও H বিন্দুতে মিশিল।

প্রমাণ : যেহেতু, BG ও DH সমান্তর (কারণ উভয়েই ACEর সমান্তর) এবং BDF উহাদের ছেদ করিয়াছে।

$\therefore$ $\angle$GBD = বহিঃস্থ $\angle$HDF ;

আবার, যেহেতু, CD ও EF সমান্তর এবং BF তাহাদের ছেদ করিয়াছে,

$\therefore$ $\angle$BDG = অন্তঃস্থ বিপরীত $\angle$DFH ;

পুনরায়, যেহেতু AG, CH ক্ষেত্রদ্বয় সামান্তরিক,

∴ BG = বিপরীত বাহু AC,

এবং DH = বিপরীত বাহু CE ;

কিন্তু দেওয়া আছে AC = CE,

∴ BG = DH

এখন BDG, DFH ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

$\angle GBD = \angle HDF$ (প্রমাণিত হইল),

$\angle BDG = \angle DFH$ (প্রমাণিত হইল),

এবং BG = অনুরূপ বাহু DH ;

∴ BDG, DFH ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান ;

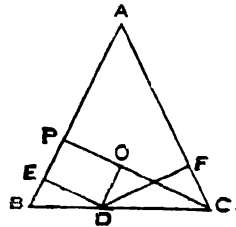
∴ BD = DF.

অনেকগুলি সমান্তর রেখা থাকিলেও ঐরূপ হইবে।

অনুশীলনী (১৩)

[বিবিধ]

১। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির কোন বিন্দু হইতে সমান বাহু দুইটির উপর লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে উহাদের যোগফল ভূমির যে-কোন প্রান্তবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর পতিত লম্বের সমান হয়।

ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (AB = AC). BC ভূমিতে যে-কোন একটি বিন্দু D লও। D হইতে AB ও AC বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে DE ও DF দুইটি লম্ব অঙ্কিত কর। BC ভূমির

যে-কোন প্রান্তবিন্দু, ধর C বিন্দু, হইতে বিপরীত বাহু ABর উপর CP একটি লম্ব অঙ্কিত হইল।

এখন প্রমাণ করিতে হইবে, CP = DE + DF.

প্রমাণ: D হইতে DO একটি সরল রেখা EPর সমান্তরাল করিয়া আঁক ; ধর উহা PCকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, EPOD একটি সামান্তরিক হইল (কারণ DE ও OP উভয়েই ABর উপর লম্ব অতএব উহারা পরস্পর সমান্তরাল);

∴ DE = OP (২৫শ উপপাদ্য)

আবার, △DOC ও △DFCর মধ্যে

∠DOC = ∠DFC (প্রত্যেকে এক সমকোণ বলিয়া),

∠FCD = ∠ABC = বহিঃস্থ ∠ODC

এবং DC সাধারণ বাহু ;

অতএব ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান ;

∴ OC = FD

অতএব CP = CO + OP

= FD + DE.

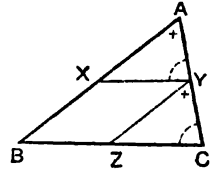
মন্তব্য: ইহা হইতে আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পারি যে ভূমিস্থ যে-কোন বিন্দু হইতে সমান বাহুদ্বয়ের দূরত্বের পরিমাণের যোগফল সর্বদা একই বা **ধ্রুব** (constant) থাকে।

যেহেতু উপরের প্রমাণ হইতে আমরা দেখিতে পাই যে D বিন্দুটি BC ভূমির যে-কোন স্থানেই লওয়া হউক না কেন DE + DF সর্বদাই CPর সমান হইবে। কিন্তু CP একটি ধ্রুব রাশি।

অতএব DE + DF সর্বদাই সমান থাকিবে।

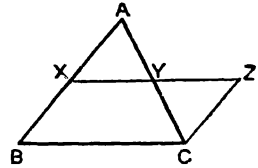
২। কোন ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল কোন সরল রেখা টানিলে তাহা অপর বাহুকেও সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

সঙ্কেত: ABC একটি ত্রিভুজ, X, AB সরল রেখার মধ্যবিন্দু এবং XY, BCর সমান্তরাল করিয়া টানা হইল। আমাদের প্রমাণ করিতে হইবে AY = YC.

YZ, ABর সমান্তরাল করিয়া টানা হইল।

এখন প্রমাণ কর ZYC ও XAY ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

৩। একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় যুক্ত করিয়া যে সরল রেখা পাওয়া যায়, তাহা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হয়।

সঙ্কেত: ABC ত্রিভুজের AB, AC বাহুর X ও Y মধ্যবিন্দুদ্বয় দেওয়া আছে।

প্রমাণ কর XY, BCর সমান্তর। XYকে Z পর্যন্ত বর্ধিত কর, যাহাতে YZ, XYএর সমান হয়। ZC যোগ কর। এখন প্রমাণ কর AYX, CYZ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। এবং BXZC একটি সামান্তরিক।

৪। উপরের উদাহরণে প্রমাণ কর $XY = \frac{1}{2}BC$.

৫। যদি ৩নং উদাহরণে K, BCর মধ্যবিন্দু হয় এবং XK, YK যোগ করা হয়, তবে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি চারিটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত হইয়াছে।

৬। কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে এক সরল রেখা ভূমি পর্যন্ত টানা হইল। প্রমাণ কর এই রেখা অপর দুই বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

৭। কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সকল যোগ করিলে তাহারা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

৮। কোন চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সকল যোগ করিলে একটি সামান্তরিক ক্ষেত্র পাওয়া যায়।

৯। একটি রম্বসের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সকল যোগ করিলে একটি আয়তক্ষেত্র পাওয়া যাইবে।

১০। ABCD একটি সামান্তরিক ক্ষেত্র; বিপরীত বাহুদ্বয় AD, BCর X ও Y যথাক্রমে মধ্যবিন্দু; দেখাও BX ও DY, AC কর্ণকে ত্রিখণ্ডিত করিয়াছে।

১১। তিনটি সমান্তরাল রেখা দুইটি ছেদক হইতে সমান সমান অংশ কর্তন করিলে, যে সমান্তরাল রেখাটি মধ্যস্থলে অবস্থিত থাকিল, তাহা অন্য দুইটি সমান্তরাল রেখার যোগফলের অর্ধেক হইবে।

১২। কোন ট্রাপিজিয়মের যে বাহু দুইটি সমান্তরাল নহে, তাহাদের মধ্যবিন্দুদ্বয় যোগ করিলে ঐ যোজকটি সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাহাদের যোগসমষ্টির অর্ধাংশের সমান হইবে।

১৩। কোন সমবাহু ত্রিভুজের ভিতরে অবস্থিত যে-কোন বিন্দু হইতে বাহু তিনটির উপর লম্ব পাত করা হইল; প্রমাণ করিতে হইবে যে, উহাদের সমষ্টি, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর পতিত লম্বের সমান।

১৪। দুইটি সমান ও সমান্তরাল সরল রেখার প্রান্তবিন্দু হইতে অপর একটি সরল রেখার উপর লম্ব পাত করিলে একটি রেখার লম্ব দুইটির পাদবিন্দুর দূরত্ব অপর রেখার লম্ব দুইটির পাদবিন্দুর দূরত্বের সমান হইবে।

১৫। ABC ত্রিভুজের ভূমির সহিত সমান্তরাল Ll, Mm, Nn, প্রভৃতি কতকগুলি সরল রেখা যদি AB বাহুকে সমান সমান অংশে বিভক্ত করে, তাহা হইলে উহারা AC বাহুকেও সমান সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

ষষ্ঠ অধ্যায়

সম্পাদ্য (Problems)

জ্যামিতির সম্পাদ্য অনুশীলন করিতে প্রধানত নিম্নলিখিত যন্ত্রগুলির প্রয়োজন হয় :—

(ক) মানদণ্ড বা স্কেল (Scale). এই মানদণ্ড এক পাশে ইঞ্চি এবং তাহার ভগ্নাংশে, অপর পাশে সেন্টিমিটার ও তাহার ভগ্নাংশে বিভক্ত থাকিবে।

(খ) ত্রিকোণী যুগল (Set-squares). ত্রিকোণীর মধ্যে প্রথম সমকোণী ত্রিকোণীর একটি সূক্ষ্ম কোণ 45° হওয়া চাই। এবং দ্বিতীয় সমকোণী ত্রিকোণীর একটি সূক্ষ্ম কোণ 60° হওয়া চাই।

(গ) একটি অর্ধবৃত্তাকার কোণমান-যন্ত্র (Protractor).

(ঘ) এক জোড়া দ্বিপদ-যন্ত্র (Compass).

(ঙ) এক জোড়া কাঁটা-কম্পাস (Dividers).

(চ) একটি বা দুইটি কঠিন সীসযুক্ত পেন্সিল (Hard Pencil).

(ছ) একটি রবার (Eraser) ও একটি ছুরি (Pen-knife).

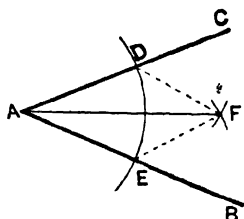
মন্তব্য ১ : পেন্সিলের সীস খুব সরু করিয়া লওয়া উচিত এবং বিন্দু ইত্যাদি যুক্ত করিবার সময় সাবধানতা অবলম্বন করা উচিত যাহাতে বিন্দুর বাহিরে রেখাপাত না হয়।

মন্তব্য ২ : পুস্তকে মাত্র কয়েকটি সম্পাদ্যে সম্পূর্ণ অঙ্কনাদি দেওয়া হইয়াছে, অন্যগুলিতে মাত্র আবশ্যকীয় চিত্র প্রদর্শিত হইয়াছে; কিন্তু ছাত্রদের **সম্পাদ্যের সম্পূর্ণ অঙ্কন দেখাইতে হইবে।**

প্রথমবার পড়িবার সময় শুধু অঙ্কনাদি করিয়া দ্বিতীয় বারে প্রমাণাদি করা কর্তব্য।

১ম সম্পাদ্য (ইউক্লিড ১।৯)

কোন একটি নির্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a given angle.]

CAB একটি নির্দিষ্ট কোণ।

ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ইচ্ছানুরূপ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তের চাপ অঙ্কিত কর ; চাপটি AC ও ABকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল।

D ও E বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করিয়া এবং আবশ্যক মত ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তের চাপ অঙ্কিত কর, চাপ দুইটি পরস্পর F বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে FA, $\angle$CABকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ : DF ও EF যোগ কর।

এখন, FDA ও FEA ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

AD = AE (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া),

DF = EF (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

AF সাধারণ বাহু ;

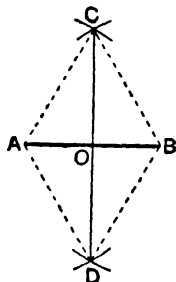
$\therefore$ FDA ও FEA ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

অতএব $\angle$DAF = $\angle$EAF,

অর্থাৎ FA, CAB কোণেকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

২য় সম্পাদ্য (ইউক্লিড্ ১।১০)

একটি নির্দিষ্ট সীমাবদ্ধ সরল রেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে

[To bisect a given finite straight line.]

AB একটি নির্দিষ্ট সীমাবদ্ধ সরল রেখা।

ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : A ও B বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করিয়া এবং আবশ্যক মত ব্যাসার্ধ লইয়া A, Bর উভয় পার্শ্বে মোট চারিটি বৃত্তের চাপ অঙ্কিত কর। উহারা C ও D বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল।

CD যোগ কর, এবং মনে কর CD, ABকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে, AB, O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

প্রমাণ : AC, BC, AD ও BD যোগ কর।

এখন ACD ও BCD ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

AC = BC (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া),

AD = BD (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

এবং CD সাধারণ বাহু ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

∴ $\angle ACD = \angle BCD$.

আবার, ACO, BCO ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

AC = BC (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া),

CO সাধারণ বাহু,

এবং অন্তর্ভূত $\angle ACO$ = অন্তর্ভূত $\angle BCO$;

$\therefore$ AO = BO

অর্থাৎ AB, O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

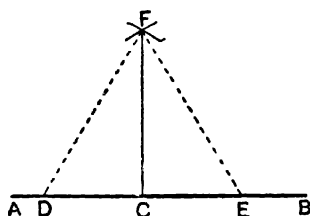
মন্তব্য ১ : উপরের সম্পাদ্যে AB সরল রেখার অর্ধেকের বড় যে-কোন ব্যাসার্ধ লওয়া যাইতে পারে, কিন্তু অর্ধেক বা তদপেক্ষা ছোট ব্যাসার্ধ লইলে অঙ্কন সম্ভবপর হইবে না।

মন্তব্য ২ : উপরের সম্পাদ্যে AOC, BOC ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান প্রমাণিত হইয়াছে।

অতএব, সন্নিহিত কোণদ্বয় AOC এবং BOC পরস্পর সমান; সুতরাং CD, ABকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

৩য় সম্পাদ্য (ইউক্লিড ১।১১)

কোন একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার উপরস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।

[To draw a straight line perpendicular to a given straight line from a given point in it.]

AB একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং C উহার উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

C বিন্দুতে ABর উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।

অঙ্কন : C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ইচ্ছামত ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তের চাপ অঙ্কিত কর ; ঐ চাপটি ABকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল।

D ও E বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করিয়া এবং CD অপেক্ষা বৃহত্তর যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া ABর এক পার্শ্বে দুইটি বৃত্তের চাপ অঙ্কিত কর। উহারা F বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল।

CF যোগ কর।

তাহা হইলে CF, ABর উপর লম্ব।

প্রমাণ : DF, EF যোগ কর।

এখন FCD, FCE ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

CD = CE (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া),

DF = EF (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

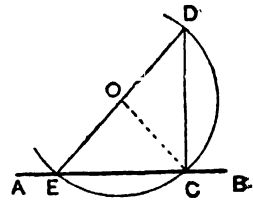
এবং FC সাধারণ বাহু ;

∴ ∠FCD = ∠FCE ;

আর ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকেই এক সমকোণ ;

∴ CF, ABর উপর লম্ব।

২য় প্রণালী

অঙ্কন : ABর বাহিরে O বিন্দুটি লও। Oকে কেন্দ্র করিয়া এবং OCর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। বৃত্তটি ABকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

EO যোগ করিয়া পরিধি পর্যন্ত বর্ধিত কর, এবং উহাকে D বিন্দুতে ছেদ করাও।

DC যোগ কর।

তাহা হইলে CD, ABর উপর C বিন্দুতে লম্ব।

প্রমাণ : OC যোগ কর।

OD = OC

∴ ∠OCD = ∠ODC

এবং OE = OC

∴ ∠OCE = ∠OEC

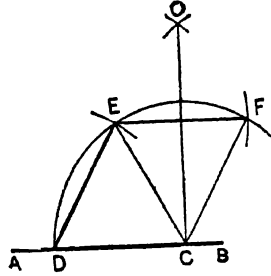
∴ সমগ্র ∠DEC = ∠ODC + ∠OEC

= দুই সমকোণের অর্ধাংশ

= এক সমকোণ

অর্থাৎ CD, ABর উপর C বিন্দুতে লম্ব।

৩য় প্রণালী

অঙ্কন : C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ইচ্ছামত ব্যাসার্ধ লইয়া DEF একটি চাপ অঙ্কিত কর, চাপটি ABকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং পূর্ব ব্যাসার্ধের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর। পূর্বোক্ত চাপকে ইহা E বিন্দুতে ছেদ করিল।

আবার, E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া পূর্ব ব্যাসার্ধের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর। এই চাপটি প্রথমোক্ত চাপকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

CE, CF যোগ কর।

ECF কোণকে CO দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর।

তাহা হইলে CO, ABর উপর লম্ব।

প্রমাণ : DE, EF যোগ কর।

DEC ও EFC দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ ;

∴ ∠DCE, ∠ECF প্রত্যেকে = এক সমকোণের দুই-তৃতীয়াংশ ;

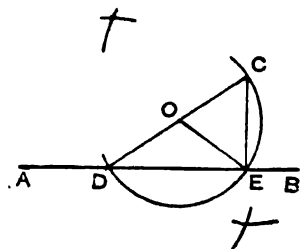
এবং ∠ECO, ∠ECFএর অর্ধাংশ ;

∴ ∠DCO, এক সমকোণের দুই-তৃতীয়াংশ ও এক-তৃতীয়াংশের যোগফলের সমান অর্থাৎ এক সমকোণের সমান ;

অতএব, CO, ABর উপর লম্ব।

৪র্থ সম্পাদ্য (ইউক্লিড ১।১২)

বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।

[To draw a straight line perpendicular to a given straight line from a given point outside it.]

AB একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং C একটি বহিঃস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু। উহা হইতে ABর উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।

অঙ্কন : ABর উপর D একটি বিন্দু লও। CD যোগ কর এবং ইহাকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

Oকে কেন্দ্র করিয়া এবং OD বা OC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তের চাপ অঙ্কিত কর। চাপটি ABকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

CE যোগ কর ;

তাহা হইলে CE, ABর উপর লম্ব।

প্রমাণ : OE যোগ কর।

এখন, যেহেতু $OE = OD$, $\therefore \angle OED = \angle ODE$;

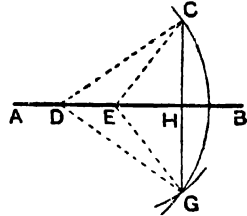
আর, যেহেতু $OE = OC$, $\therefore \angle OEC = \angle OCE$;

$\therefore$ সমগ্র $\angle DEC = \angle EDC + \angle ECD$

= দুই সমকোণের অর্ধেক অর্থাৎ এক সমকোণ।

$\therefore$ CE, ABর উপর লম্ব।

২য় প্রণালী

অঙ্কন : ABর উপর D ও E দুইটি বিন্দু লও। D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং DCর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া ABর যে পার্শ্বে C অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে একটি চাপ অঙ্কিত কর।

E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ECর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর ; ইহা পূর্বোক্ত চাপকে G বিন্দুতে ছেদ করিল।

CG যোগ কর, উহা ABকে H বিন্দুতে ছেদ করিল ;

তাহা হইলে CH, ABর উপর লম্ব।

প্রমাণ : DC, DG, EC, EG যোগ কর।

এখন DCE, DGE ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

DC = DG, (অঙ্কনসিদ্ধ)

EC = EG, (,,)

DE সাধারণ বাহু ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান ;

∴ $\angle CDE = \angle GDE$.

পুনরায়, CDH ও GDH ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

DC = DG, DH সাধারণ বাহু

এবং $\angle CDH = \angle GDH$;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান ;

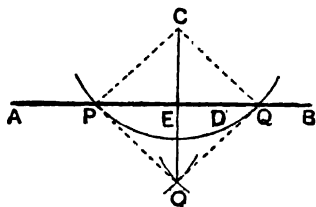
∴ $\angle DHC = \angle DHG$;

আর, ইহারা সন্নিহিত কোণ,

অতএব, প্রত্যেকে এক সমকোণের সমান ;

সুতরাং CH, ABর উপর লম্ব।

৩য় প্রণালী

অঙ্কন : AB সরল রেখার যে পার্শ্বে C আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে D বিন্দুটি লও।

C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং CDকে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। চাপটি ABকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

P ও Q বিন্দু দুইটিকে কেন্দ্র করিয়া এবং পূর্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। উহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল।

CO যোগ কর, উহা ABকে E বিন্দুতে ছেদ করিল ;

তাহা হইলে CE উদ্দিষ্ট লম্ব।

প্রমাণ : CP, CQ, OP, OQ যোগ কর।

এখন PCO, QCO ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

PC = QC, (অঙ্কনসিদ্ধ)

OP = OQ (,,)

এবং CO সাধারণ বাহু ;

∴ PCO, QCO ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান ;

অতএব, $\angle PCO = \angle QCO$.

আবার, PCE, QCE ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

PC = QC (অঙ্কনসিদ্ধ)

CE সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূত $\angle PCE$ = অন্তর্ভূত $\angle QCE$; (প্রমাণিত)

∴ PCE, QCE ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান ;

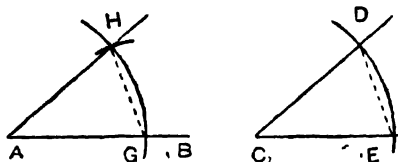
অতএব, $\angle PEC = \angle QEC$;

আর, ইহারা সন্নিহিত কোণ ;

সুতরাং CE, PQ বা ABর উপর লম্ব।

৫ম সম্পাদ্য (ইউক্লিড্ ১।২৩)

একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান করিয়া একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[At a given point in a given straight line to make an angle equal to a given angle.

AB সরল রেখার উপর A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং DCE একটি নির্দিষ্ট কোণ।

AB সরল রেখার A বিন্দুতে DCE কোণের সমান করিয়া একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর।

চাপটি CD ও CEকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল।

A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং পূর্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর।

চাপটি ABকে G বিন্দুতে ছেদ করিল।

G বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং EDর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর।

চাপটি পূর্বাঙ্কিত চাপকে H বিন্দুতে ছেদ করিল।

AH যোগ কর ;

তাহা হইলে HAG উদ্দিষ্ট কোণ।

প্রমাণ : DE ও HG যোগ কর।

এখন HAG ও DCE ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

AG = CE, (অঙ্কনসিদ্ধ)

AH = CD (অঙ্কনসিদ্ধ)

এবং HG = DE ; (অঙ্কনসিদ্ধ)

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান ;

∴ $\angle HAG = \angle DCE$.

অনুশীলনী (১৪)

১। একটি সরল রেখার একপার্শ্বে একটি 45° কোণ এবং অপর পার্শ্বে একটি 60° কোণ অঙ্কন করিয়া উহাদের বাহু দুইটি মিশাইয়া দাও। কোণমান-যন্ত্র দ্বারা ঐ উৎপন্ন কোণটি মাপিয়া দেখাও যে উহা 75°.

২। নিম্নলিখিত কোণগুলি অঙ্কন কর :—

(ক) একটি সমকোণ ;

(খ) একটি 135° কোণ

এবং (গ) একটি 30° কোণ।

কোণমান-যন্ত্র দ্বারা পরীক্ষা করিয়া দেখ অঙ্কন নির্ভুল হইল কি না।

৬ষ্ঠ সম্পাদ্য (ইউক্লিড্ ১।৩১)

কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কোন একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তর করিয়া একটি সরল রেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

[Through a given point to draw a straight line parallel to a given straight line.]

X একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা।

X দিয়া ABর সমান্তরাল একটি রেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : ABর উপর যে-কোন একটি বিন্দু L লও, এবং XL যোগ কর।

এখন, LXএর X বিন্দুতে XLB কোণের সমান করিয়া LXP কোণটি অঙ্কিত কর। (৫ম সম্পাদ্য)

তাহা হইলে, XP, ABর সমান্তর।

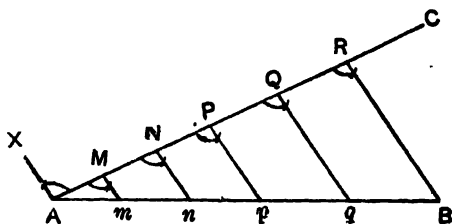
প্রমাণ : যেহেতু, $\angle PXL = \angle XLB$

এবং ইহারা একান্তর কোণ ;

$\therefore$ XP, ABর সমান্তর।

৭ম সম্পাদ্য

একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে কতকগুলি সমান ভাগে ভাগ করিতে হইবে।

[To divide a given straight line into any number of equal parts.]

AB একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা।

ইহাকে কতকগুলি সমান ভাগে ভাগ করিতে হইবে (ধর 5টি)।

অঙ্কন : A বিন্দু দিয়া AC যে-কোন একটি সরল রেখা অঙ্কিত কর, উহাতে CAB কোণটি উৎপন্ন হইল।

AC হইতে AM যে-কোন অংশ কাটিয়া লও।

AC হইতে AMএর সমান করিয়া MN, NP, PQ, QR অংশগুলি কাটিয়া লও। RB যোগ কর।

M, N, P, Q বিন্দুগুলি দিয়া RBর সমান্তর করিয়া চারিটি সমান্তর রেখা অঙ্কিত কর, উহারা ABকে যথাক্রমে m, n, p ও q বিন্দুতে ছেদ করিল ; তাহা হইলে AB সরল রেখা m, n, p, q বিন্দুতে সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত হইয়াছে।

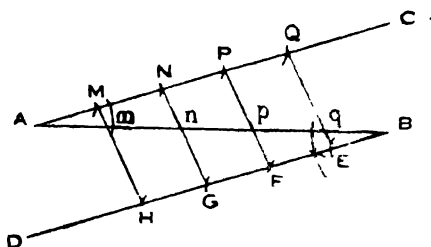
প্রমাণ : A বিন্দু দিয়া RBর সমান্তর করিয়া AX সরল রেখাটি অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে AX, Mm, Nn, Pp, Qq, এবং RB নিজেরা পরস্পর সমান্তর, আর ইহারা AC সরল রেখার উপর পরস্পর সমান প্রতিচ্ছেদ করিয়াছে।

∴ ABর উপর তাহারা পরস্পর সমান প্রতিচ্ছেদ করিয়াছে।

∴ Am = mn = np = pq = qB ;

অর্থাৎ AB সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত হইয়াছে।

দ্বিতীয় প্রণালী

অঙ্কন : A বিন্দু দিয়া AC যে-কোন একটি সরল রেখা অঙ্কিত কর, উহাতে CAB কোণটি উৎপন্ন হইল ; AC হইতে AM যে-কোন অংশ কাটিয়া লও। AC হইতে AMএর সমান করিয়া MN, NP এবং PQ অংশগুলি কাটিয়া লও। (৬ষ্ঠ সম্পাদ্য)

B বিন্দু দিয়া ACর সমান্তরাল BD সরল রেখা টান। এখন BD হইতে AMএর সমান করিয়া BE, EF, FG, GH অংশগুলি কাটিয়া লও। MH, NG, PF ও QE যুক্ত কর ; এখন ইহারা ABকে যথাক্রমে m, n, p ও q বিন্দুতে ছেদ করিয়া উহাকে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত করিল।

প্রমাণ : যেহেতু MN, NP ও PQ যথাক্রমে HG, GF, FEর সমান ও সমান্তরাল ; ∴ MH, NG, PF ও QE পরস্পর সমান

ও সমান্তরাল। এখন QAq ত্রিভুজটির AQ বাহুর M, N, P বিন্দুগুলির মধ্য দিয়া Mm, Nn এবং Pp রেখাগুলি Qqএর সমান্তরাল এবং যেহেতু AM, MN, NP, PQ অংশগুলি পরস্পর সমান,

$\therefore$ Am, mn, np ও pqও পরস্পর সমান।

এইরূপে প্রমাণ করা যায়, BHm ত্রিভুজটির Bm বাহুটি, Bq, qp, pn ও nm এই চারিটি সমান অংশে বিভক্ত হইয়াছে।

$\therefore$ AB রেখাটি Am, mn, np, pq ও qB এই পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত হইল।

অনুশীলনী (১৫)

১। এক সীমাবদ্ধ সরল রেখার উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

২। যে-কোন কোণকে সমান চারি অংশে বিভক্ত কর।

৩। AB একটি সীমাবদ্ধ সরল রেখা। উহার উপর এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকে ভূমি ABর দ্বিগুণ হয়।

৪। AB একটি সীমাবদ্ধ সরল রেখা। উহার উপর এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে যাহার সমান বাহু দুইটির প্রত্যেকে একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান হয়। ইহা কি সকল অবস্থায় সম্ভব হইবে ?

৫। যে-কোন এক সীমাবদ্ধ সরল রেখাকে সমান চারি ভাগে বিভক্ত কর।

৬। একটি সীমাবদ্ধ সরল রেখাকে এইরূপ ভাগে ভাগ কর, যাহাতে এক ভাগ অপর ভাগের সাত গুণ হয়।

৭। একটি ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি অঙ্কিত কর। তাহারা এক বিন্দুতে মিলিত হইবে কিনা পরীক্ষা করিয়া বল।

৮। XY একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা ; A ও B এই সরল রেখার বহিঃস্থ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। XYতে এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যাহা A ও B হইতে সমদূরে অবস্থিত থাকিবে। আর বিন্দুদ্বয় কিরূপ অবস্থিত হইলে এই অঙ্কনটি অসম্ভব হইবে, তাহা দেখাও।

৯। এক নির্দিষ্ট সরল রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরল রেখার উপর এমন দুইটি সরল রেখা অঙ্কন কর যাহারা ঐ সরল রেখার সহিত সমান ভাবে নত হইয়াছে (অর্থাৎ সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে)।

১০। দুইটি কোণের যোগফল একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান এবং বিয়োগফল অপর একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান। কোণ দুইটি নির্ণয় কর।

১১। এক নির্দিষ্ট সরল রেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অপর একটি সরল রেখা টান যাহা নির্দিষ্ট সরল রেখার সহিত মিলিত হইয়া একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ উৎপাদন করে।

১২। ABC ত্রিভুজের BC ভূমিতে এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর, যে বিন্দু হইতে AB ও AC বাহুর উপর লম্ব টানিলে লম্বদ্বয় পরস্পর সমান হয়।

১৩। একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর এমন এক বিন্দু নির্ণয় কর, যাহা দুইটি পরস্পর অবচ্ছিন্ন সরল রেখা হইতে সমান দূরে অবস্থান করিতেছে। কোন্ অবস্থায় ইহা অসম্ভব হইবে ?

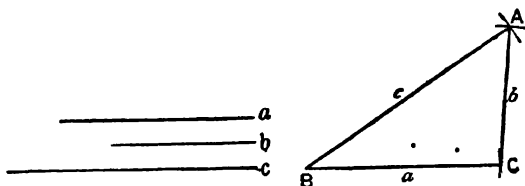
১৪। এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় পরস্পর দুইটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে। এবং শীর্ষবিন্দুতে ভূমির উপর লম্ব রেখাটি একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার সমদীর্ঘ হইবে।

১৫। তিনটি সরল রেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। রেখাত্রয়ের মধ্যে সীমাবদ্ধ এমন একটি সরল রেখা টান যেন তাহা উহাদের মধ্যরেখাটি দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

ত্রিভুজাঙ্কন

৮ম সম্পাদ্য (ইউক্লিড ১।২২)

তিনটি নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle, having given the lengths of the three sides.]

a, b, c, তিনটি নির্দিষ্ট সরল রেখা।

উহাদের সমান বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : aর সমান করিয়া BC সরল রেখাটি অঙ্কিত কর।

B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং cর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর ; C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং bর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর ; এই চাপটি পূর্ব চাপকে A বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB, AC যোগ কর।

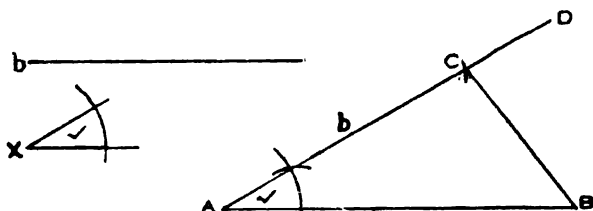
তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ (অঙ্কনসিদ্ধ)

∴ ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

মন্তব্য : নির্দিষ্ট বাহুগুলির মধ্যে যে-কোন দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়া চাই ; তাহা না হইলে ত্রিভুজটি আঁকা যায় না (১১শ উপপাদ্য) কারণ B ও Cকে কেন্দ্র করিয়া যে বৃত্তাংশ অঙ্কিত করা হইয়াছে তাহা পরস্পরকে ছেদ করিবে না এবং ত্রিভুজটিও অঙ্কিত হইবে না।

অনু. ১। কোন ত্রিভুজের দুই বাহু ও অন্তর্ভূর্ত কোণ নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given two sides and the included angle.]

মনে কর, AB ও b, কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং X উহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণ।

এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার দুইটি বাহু, নির্দিষ্ট বাহু AB ও bর সমান এবং ইহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণ, ∠Xএর সমান হয়।

অঙ্কন: AB সরল রেখার A বিন্দুতে ∠Xএর সমান করিয়া ∠BAD অঙ্কিত কর। (৫ম সম্পাদ্য)

AD হইতে bর সমান করিয়া AC কাটিয়া লও।

BC সংযুক্ত কর।

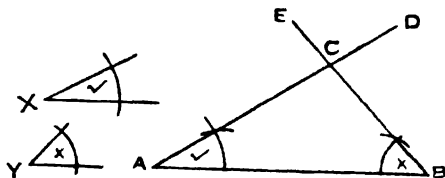
তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

কারণ AB নির্দিষ্ট বাহু,

$AC = b$

এবং $\angle BAC = \angle X$.

অনু. ২। কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাহাদের সন্নিহিত বাহু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given two angles and the side adjacent to them.]

মনে কর AB নির্দিষ্ট বাহু এবং ∠X ও ∠Y নির্দিষ্ট কোণদ্বয়।

এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি বাহু ABর সমান এবং A ও B বিন্দুদ্বয়ের কোণদ্বয় যথাক্রমে ∠X ও ∠Yএর সমান হয়।

অঙ্কন : AB সরল রেখার A বিন্দুতে ∠Xএর সমান করিয়া ∠BAD অঙ্কিত কর ; (৫ম সম্পাদ্য)

আবার AB সরল রেখার B বিন্দুতে ∠Yএর সমান করিয়া ∠ABE অঙ্কিত কর ; (৫ম সম্পাদ্য)

AD, BE যেন C বিন্দুতে ছেদ করিল,

এখন ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ ;

কারণ, AB নির্দিষ্ট বাহু

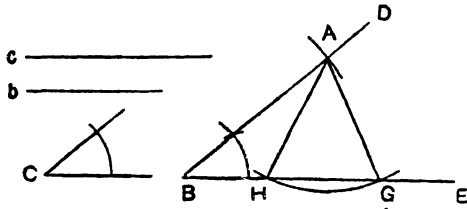
এবং অঙ্কনানুসারে ∠BAC = ∠X, ও ∠ABC = ∠Y.

মন্তব্য : একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ জানা থাকিলে তৃতীয় কোণটি সহজেই বাহির করা যায়, কারণ একটি সরল কোণ = 2 সমকোণ = ত্রিভুজটির তিনটি কোণের সমষ্টি।

এখন কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং যে-কোন একটি বাহু দেওয়া থাকিলে উপরের সম্পাদ্য অনুযায়ী ত্রিভুজটি অঙ্কিত করা যায়।

৯ম সম্পাদ্য

দুইটি বাহু এবং উহার একটির বিপরীত কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[To construct a triangle having given two sides and an angle opposite to one of them.]

মনে কর b, c, দুইটি নির্দিষ্ট বাহু এবং $\angle$C, b বাহুর বিপরীত নির্দিষ্ট কোণ।

এখন, এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার দুইটি বাহু b ও cর সমান হয় এবং b বাহুর বিপরীত কোণটি $\angle$Cর সমান হয়।

অঙ্কন : BE একটি সরল রেখা। B বিন্দুতে $\angle$Cর সমান করিয়া $\angle$EBD অঙ্কিত কর। (৫ম সম্পাদ্য)

B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া cর সমান ব্যসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর ; চাপটি BDকে A বিন্দুতে ছেদ করিল।

A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং bর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর ; চাপটি সম্ভব হইলে, BEকে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করিল।

AG, AH যোগ কর।

তাহা হইলে ABG বা ABH উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : $\angle$ABH বা $\angle$ABG $=$ $\angle$C, (অঙ্কনসিদ্ধ)

AB $= c$ (,,)

এবং AH বা AG $= b$; (,,)

$\therefore$ ABG বা ABH উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

দ্রষ্টব্য : ৯ম সম্পাদ্যের উপাত্ত হইতে ত্রিভুজ অঙ্কন ও সমাধান কল্পে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি পরিজ্ঞাত থাকা আবাশ্যক, কারণ প্রদত্ত উপাত্ত হইতে কোন কোন স্থলে একটি ত্রিভুজ, কোথাও বা দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত হইতে পারে ; আবার কোন স্থলে একটি ত্রিভুজও অঙ্কন সম্ভবপর হয় না।

(১) ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভবপর হয় না—

(ক) যদি নির্দিষ্ট কোণটি স্থূল কোণ বা সমকোণ এবং
$b=c$ বা $b<c$ হয় ;

(খ) যদি নির্দিষ্ট কোণটি সূক্ষ্ম কোণ হয় এবং
$b<$A হইতে BEর উপর লম্ব।

(২) একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত হয়—

(ক) যদি নির্দিষ্ট কোণটি সূক্ষ্ম কোণ এবং
$b=c$ অথবা $b>c$ হয়।

(খ) যদি নির্দিষ্ট কোণটি সূক্ষ্ম কোণ হয় এবং
$b=$A হইতে BEর উপর পতিত লম্ব।

(গ) যদি নির্দিষ্ট কোণটি স্থূল কোণ এবং $b>c$ হয়।

(৩) দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত হয়—

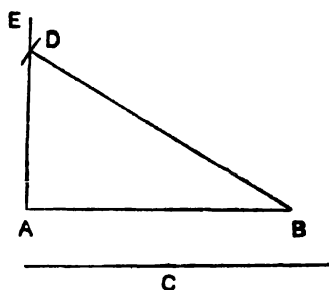
(ক) যদি নির্দিষ্ট কোণটি সমকোণ এবং $b>c$ হয়। (দুইটি সমান ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে।)

(খ) যদি নির্দিষ্ট কোণটি সূক্ষ্ম কোণ এবং $b<c$ কিন্তু $>$A হইতে BEর উপর পতিত লম্ব। (দুইটি অসমান ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে।)

যে ক্ষেত্রে এইরূপ দুইটি ফল পাওয়া যায় তাহাকে **দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র** (Ambiguous Case) বলে।

১০ম সম্পাদ্য

অতিভুজ ও অন্য একটি বাহু দেওয়া আছে; একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

[To construct a right-angled triangle having given the hypotenuse and one side.]

AB নির্দিষ্ট বাহু এবং C অতিভুজ।

এইরূপ একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি বাহু ABর সমান এবং অতিভুজটি Cর সমান হয়।

অঙ্কন: A বিন্দুতে ABর উপর AE একটি লম্ব অঙ্কিত কর।

B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া Cর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। চাপটি AEকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

DB যোগ কর।

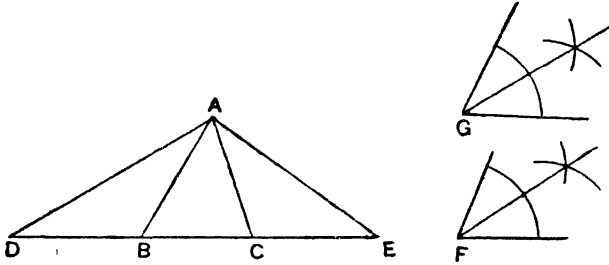
তাহা হইলে DAB উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: DB = C

এবং ∠DAB সমকোণ। (অঙ্কনসিদ্ধ)

১১শ সম্পাদ্য

পরিসীমা ও তুইটি কোণ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[To draw a triangle having given the perimeter and two angles.]

DE নির্দিষ্ট পরিসীমা এবং ∠G ও ∠F নির্দিষ্ট কোণ।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার পরিসীমা DEর সমান হয় এবং তুইটি কোণ ∠G ও ∠Fএর সমান হয়।

অঙ্কন: ∠G ও ∠Fকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

DEর উপর $\frac{1}{2}$∠G ও $\frac{1}{2}$∠Fএর সমান করিয়া যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে একই পার্শ্বে তুইটি কোণ EDA ও DEA অঙ্কন কর। উহাদের বাহুদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করিল।

DA ও EAর উপর $\frac{1}{2}$∠G ও $\frac{1}{2}$∠Fএর সমান করিয়া যথাক্রমে DAB, EAC কোণ তুইটি অঙ্কন কর। AC ও AB, DEকে C ও B বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: যেহেতু, ∠ADB = ∠DAB (অঙ্কনসিদ্ধ)

∴ BD = BA.

একই রূপে, CE = CA.

বহিঃস্থ $\angle ABC =$ অন্তঃস্থ বিপরীত $\angle BAD + \angle BDA$

$$= \tfrac{1}{2}\angle G + \tfrac{1}{2}\angle G = \angle G.$$

একই রূপে $\angle ACB = \angle F$

এবং $DE = DB + BC + CE$

$$= BA + BC + CA.$$

অনুশীলনী (১৬)

১। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর বাহুদ্বয়ের যোগফল অথবা বিয়োগফল দেওয়া হইল ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিয়া দেখাও।

২। একটি সমবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর পতিত লম্বের পরিমাণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৩। এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার দুই বাহু এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর পতিত লম্বের পরিমাণ দেওয়া আছে।

৪। এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার ভূমি, ভূমিস্থ এক কোণ ও বাহুগুলির সমষ্টি দেওয়া আছে।

৫। ভূমিস্থ দুই কোণ এবং শীর্ষবিন্দুর উন্নতি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৬। কোন ত্রিভুজের ভূমি এবং উহার প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৭। কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং অবশিষ্ট বাহুর সমদ্বিখণ্ডকারক মধ্যমা নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৮। কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয় এবং বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু তিনটি নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিয়া দেখাও।

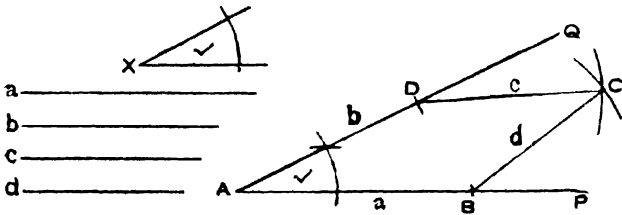
৯। দুইটি বাহুর যোগফল, অপর বাহু এবং একটি কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

চতুর্ভুজাঙ্কন

কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট থাকিলে ত্রিভুজটি অঙ্কিত করা যায়। কিন্তু কোন চতুর্ভুজের মাত্র চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট থাকিলে চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করা যায় না।

কোন চতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইলে তাহার পাঁচটি স্বতন্ত্র উপাত্ত (data) জানা আবশ্যক। যেমন,

একটি কোণ ও চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট আছে, চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a quadrilateral having given one angle and the lengths of four sides.]

মনে কর, a, b, c ও d, বাহুগুলির নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য, এবং ∠X, a ও b বাহুর অন্তর্ভূত নির্দিষ্ট কোণ।

চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AP যে-কোন একটি সরল রেখা এবং ইহা হইতে aর সমান করিয়া AB কাটিয়া লও।

∠Xএর সমান করিয়া ∠BAQ অঙ্কিত কর। (৫ম সম্পাদ্য)

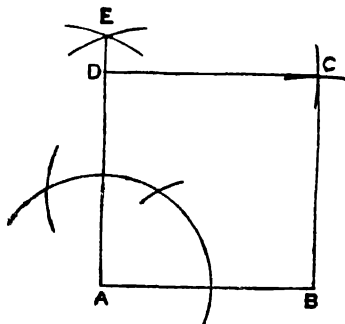
AQ হইতে bর সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও।

D ও Bকে কেন্দ্র করিয়া, যথাক্রমে c ও dর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। উহারা যেন C বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিল। BC ও CD সংযুক্ত কর।

এখন ABCD উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ। (অঙ্কনসিদ্ধ)

১২শ সম্পাদ্য (ইউক্লিড্ ১।৪৬)

একটি বাহু দেওয়া আছে ; একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

[To construct a square having given one of its sides.]

AB একটি নির্দিষ্ট বাহু।

উহার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AB সরল রেখার A বিন্দুতে AE একটি লম্ব অঙ্কিত কর। (৩য় সম্পাদ্য)

AE হইতে ABর সমান করিয়া AD কাটিয়া লও।

D ও B বিন্দু দুইটিকে কেন্দ্র করিয়া এবং ABর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর ;

উহারা পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে ABCD উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

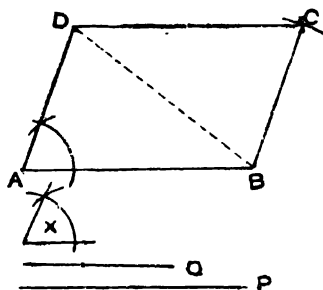
প্রমাণ : ABCD ক্ষেত্রটির বাহুগুলি সমান (অঙ্কনসিদ্ধ)

এবং ইহার BAD কোণটি সমকোণ (অঙ্কনসিদ্ধ)

অতএব ABCD, নির্দিষ্ট বাহু ABর উপর বর্গক্ষেত্র।

১৩শ সম্পাদ্য

সন্নিহিত দুইটি বাহু এবং অন্তর্ভূ্ত কোণ দেওয়া আছে ; একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর।

[To construct a parallelogram having given two adjacent sides and the included angle.]

P, Q, দুইটি নির্দিষ্ট বাহু এবং ∠X, অন্তর্ভূ্ত কোণ।

এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার দুইটি সন্নিহিত বাহু P, Qএর সমান এবং উহাদের অন্তর্ভূ্ত কোণ, ∠Xএর সমান হয়।

অঙ্কন : Pর সহিত সমান করিয়া AB অঙ্কিত কর।

A বিন্দুতে ∠Xএর সমান করিয়া BAD কোণ অঙ্কিত কর।

AD = Q করিয়া লও।

D ও Bকে কেন্দ্র করিয়া P ও Qএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। উহারা C বিন্দুতে ছেদ করিল। CD, CB যোগ কর।

তাহা হইলে, ABCD উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ : ABD, DBC ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

যেহেতু, AB = DC,

AD = BC

এবং DB সাধারণ বাহু ;

∴ $\triangle ABD = \triangle DBC$

∴ $\angle ABD = \angle CDB$, এবং ইহারা একান্তর কোণ ;

∴ AB, DC সমান্তর ও সমান

∴ ABCD উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

অনুশীলনী (১৭)

১। কোন চতুর্ভুজের দুই সন্নিহিত বাহু ও তিনটি কোণ দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

২। একটি সামান্তরিকের একটি বাহু, এবং দুইটি কর্ণ দেওয়া আছে ; সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

৩। সমান্তরাল বাহুদ্বয় এবং অন্য বাহু দুইটি নির্দিষ্ট আছে ; ট্রাপিজিয়মটি অঙ্কিত করিয়া দেখাও।

৪। কোন রম্বসের একটি বাহু এবং একটি কোণ দেওয়া আছে ; কিরূপে রম্বস্‌টি অঙ্কিত করিবে, দেখাও।

৫। একটি আয়তক্ষেত্রের একটি কর্ণ এবং কর্ণদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া থাকিলে, কিরূপে আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কন করিবে ?

৬। কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণ দেওয়া থাকিলে, বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

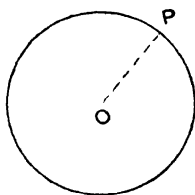
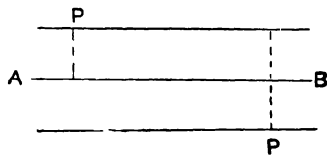
৭। একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান একটি (১) আয়তক্ষেত্র, (২) রম্বস্‌ অঙ্কন কর।

৮। চারিটি নির্দিষ্ট বাহু ও একটি কোণ দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

সপ্তম অধ্যায়

সঞ্চারপথ

১। কোন নির্দিষ্ট নিয়মানুসারে গতিশীল একটি বিন্দু যে পথ (বা পথ সকল) বাহিয়া চলে তাহাকে ঐ বিন্দুর **সঞ্চারপথ** (Locus) বলে।

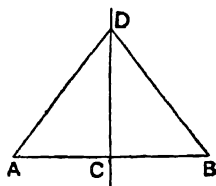
২। যদি কোন বিন্দু এমন নিয়মানুসারে চলে যে এক নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে উহার দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকে (মনে কর যেন 1 সেন্টিমিটর দূরে), তাহা হইলে উহার সঞ্চারপথ স্পষ্টতই এক বৃত্ত, এবং O ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে এবং ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1 সেন্টিমিটর হইবে (পার্শ্বস্থ চিত্র দেখ)।

৩। আবার মনে কর P একটি বিন্দু যাহা AB সরল রেখা হইতে অপরিবর্তিত দূরে (মনে কর যেন 1 সেন্টিমিটর দূরে) থাকিয়া ভ্রমণ করিতেছে।

এখন AB হইতে ঐ 1 সেন্টিমিটর দূরে ইহার এক বা উভয় পার্শ্বে একটি বা দুইটি সমান্তরাল সরল রেখা অঙ্কন করিলে যে একটি বা দুইটি সরল রেখা পাওয়া যাইবে তাহা বা তাহারাই P বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে (উপরের চিত্র দেখ)।

৪। নির্দিষ্ট নিয়মানুসারে কোন গতিশীল বিন্দু যে রেখা বা রেখাগুলি উৎপন্ন করে, ঐ রেখা বা রেখা সকলের উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুকে ঐ প্রদত্ত নিয়মের অধীন হইতে হইবে এবং রেখা বা রেখা সকলের বহিঃস্থ কোন বিন্দু ঐ প্রদত্ত নিয়মের অধীন হইবে না।

৫। সঞ্চারপথকে আর এক ভাবে ভাবা যায়। যদি কতকগুলি বিন্দু কোন নির্দিষ্ট সর্তদ্বারা নিয়ন্ত্রিত হইয়া কোন রেখা বা রেখা সকলে অবস্থান করে, তবে উক্ত রেখা বা রেখা সকলকে উক্ত বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ বলা যায়। এইভাবে ভাবিলে যে সকল বিন্দু এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে অপরিবর্তিত দূরে অবস্থান করে তাহাদের সঞ্চারপথ স্পষ্টত এক বৃত্ত এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু এবং ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ ঐ অপরিবর্তিত দূরত্বের সমান দূরত্ব লইয়া গঠিত হইবে।

১৪শ সম্পাদ্য

দুইটি স্থির বিন্দুর সংযোজক সরল রেখার সমদ্বিখণ্ডক লম্ব উক্ত বিন্দু দুইটি হইতে সমদূরে সঞ্চরণশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ।

[The locus of a point which moves so that its distances from two fixed points are equal to one another, is the perpendicular bisector of the straight line joining those two points.]

মনে কর D এমন একটি বিন্দু, যাহা A ও B বিন্দুদ্বয় হইতে সর্বদাই সমদূরে অবস্থিত, অর্থাৎ DA = DB.

প্রমাণ করিতে হইবে যে D বিন্দু, A ও Bর সংযোজক রেখার সমদ্বিখণ্ডক লম্বের উপর অবস্থিত।

AB, DA ও DB যোগ কর।

ABকে C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। DC যোগ কর।

প্রমাণ : DAC, DBC ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

DA = DB (ধরিয়া লওয়া হইয়াছে),

AC = BC (অঙ্কনসিদ্ধ)

এবং DC সাধারণ বাহু ;

∴ DAC, DBC ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান ;

∴ $\angle DCA = \angle DCB$;

আর, ইহারা সন্নিহিত কোণ,

অতএব, ইহারা প্রত্যেকে এক এক সমকোণ ;

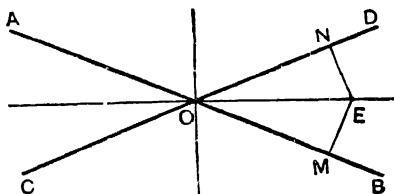
তাহা হইলে দেখা গেল, D বিন্দু ABর সমদ্বিখণ্ডক লম্বের উপর অবস্থিত।

এইরূপে DCর উপর যে-কোন স্থানে বিন্দু লইয়া প্রমাণ করা যায় যে উহারা A ও B বিন্দু হইতে সমদূরে অবস্থিত।

∴ উহাই উদ্দিষ্ট সঞ্চারপথ।

১৫শ সম্পাদ্য

পরস্পর ছেদক দুইটি সরল রেখার মধ্যবর্তী কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক, উক্ত সরল রেখাদ্বয় হইতে সমদূরে সঞ্চরণশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ।

[The locus of a point which moves so that its perpendicular distances from two intersecting straight lines are equal to one another, is the pair of straight lines which bisects the angles between them.]

AB, CD সরল রেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

মনে কর, E এমন একটি বিন্দু, যাহা হইতে রেখাদ্বয়ের উপর লম্ব EN, EM পরস্পর সমান।

EO যোগ কর।

প্রমাণ : এখন ENO, EMO ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

EM = EN (ধরিয়া লওয়া হইয়াছে),

EO সাধারণ বাহু,

এবং ∠ENO = ∠EMO, যেহেতু উভয়েই এক সমকোণ।

∴ ENO, EMO ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর সর্বতোভাবে সমান।

∴ ∠EON = ∠EOM.

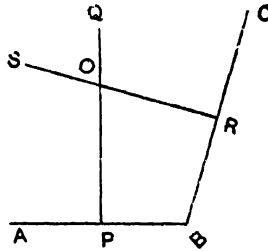
অর্থাৎ E বিন্দু ∠DOBর সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

এখন যদি E, ∠AODর মধ্যে থাকে, তাহা হইলে উক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর উহা অবস্থিত হইবে।

∴ AB, CD দ্বারা উৎপন্ন কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকের উপর E বিন্দুর সঞ্চারপথ।

১৬শ সম্পাদ্য

A, B, C বিন্দু তিনটি এক রেখায় অবস্থিত নহে। উহাদের সমান দূরে অবস্থিত বিন্দুটি বাহির কর :

[To find a point equidistant from three given points A, B, C, which are not in the same straight line.]

A ও B বিন্দু হইতে সমান দূরে সঞ্চরণশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ হইতেছে ABর সমদ্বিখণ্ডক লম্ব PQ.

আবার B ও C বিন্দু হইতে সমান দূরে সঞ্চরণশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ হইতেছে BCর সমদ্বিখণ্ডক লম্ব RS.

PQ, RS, O বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, PQ ও RS-এর সাধারণ বিন্দু O, A, B ও C বিন্দু হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

∴ O উদ্দিষ্ট বিন্দু।

অনুশীলনী (১৮)

১। কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর অঙ্কিত সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২। যে-কোন ত্রিভুজের ভূমি এবং ভূমিসংলগ্ন মধ্যমা নির্দিষ্ট আছে ; ঐ ত্রিভুজের শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩। কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয় হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর।

৪। কোন ত্রিভুজের মধ্যে এমন একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর, যাহা (১) শীর্ষ হইতে সমদূরে আছে, (২ তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরে আছে।

৫। নির্দিষ্ট অতিভুজবিশিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ সকলের শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। (উহা একটি বৃত্ত হইবে। অতিভুজটি ঐ বৃত্তের ব্যাস হইবে।)

৬। একটি ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে যে সমুদয় সরল রেখা তাহার ভূমির উপর টানা যাইতে পারে, তাহাদের মধ্যবিন্দু-সমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৭। কোন ত্রিভুজের ভূমির সমান্তরাল সরল রেখাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৮। কোন নির্দিষ্ট বাহুর উপর সমান সমান সামান্তরিক টানা হইয়াছে। কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর পঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৯। যে সকল সরল রেখা এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এক নির্দিষ্ট সরল রেখা পর্যন্ত বিস্তৃত, তাহাদের মধ্যবিন্দু সকলের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১০। যে সকল বৃত্ত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়, তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১১। BC সরল রেখার এক দিকে A একটি স্থিরবিন্দু অপর দিকে P একটি পরিবর্তনশীল বিন্দু, উহা এমন ভাবে পরিবর্তিত হয় যে AP সর্বদা BCর উপর দিকে অবস্থিত থাকে। P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১২। কোন নির্দিষ্ট সরল রেখায় অবস্থিত এমন এক বিন্দু বাহির কর যাহা অপর কোন নির্দিষ্ট সরল রেখা হইতে নির্দিষ্ট দূরে অবস্থান করিবে।

১৩। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরল রেখা হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

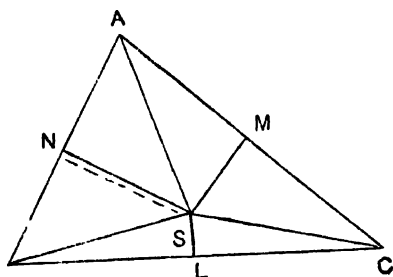
১৪। ভূমি, উচ্চতা এবং ভূমির সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

সমবিন্দু বিষয়ক কয়েকটি উপপাদ্য

সংজ্ঞা। তিন বা ততোধিক সরল রেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে তাহাকে **সমবিন্দু** (Concurrent) কহে।

১। কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটির মধ্যবিন্দুতে যে লম্বগুলি অঙ্কিত হইবে, তাহারা সমবিন্দু।

[The perpendiculars to the sides of a triangle at the middle points are concurrent.]

ABC একটি ত্রিভুজ। L, N ও M যথাক্রমে BC, AB ও ACর মধ্যবিন্দু। LS ও MS দুইটি লম্ব যথাক্রমে BC ও ACর উপর অঙ্কিত হইল, উহারা S বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল।

NS যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে NS, ABর উপর লম্ব।

প্রমাণ : SA, SB, SC যোগ কর।

এখন BLS, CLS ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

BL = CL, LS সাধারণ বাহু,

এবং $\angle$BLS = $\angle$CLS ; (প্রত্যেকটি সমকোণ বলিয়া)

$\therefore$ BS = CS.

এইরূপ ভাবে, AMS, CMS ত্রিভুজ দুইটি হইতে প্রমাণিত হয় যে,

AS = CS.

$\therefore$ AS = BS.

আবার, ANS, BNS ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

$AN = BN$,

$AS = BS$

এবং NS সাধারণ বাহু ;

$\therefore \quad \angle ANS = \angle BNS$.

আর, ইহারা সন্নিহিত কোণ,

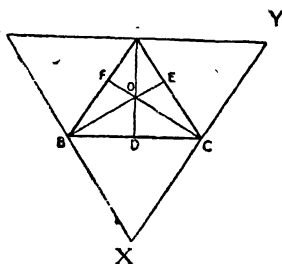
অতএব প্রত্যেকটি এক এক সমকোণের সমান,

সুতরাং, NS, ABর মধ্যবিন্দু Nএ লম্ব।

২। একটি ত্রিভুজের শীর্ষকোণগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর তিনটি লম্ব অঙ্কিত করিলে তাহারা সমবিন্দু হইবে।

[The perpendiculars to the sides of a triangle from the opposite vertices are concurrent.]

ABC একটি ত্রিভুজ এবং A, B, C হইতে AD, BE, CF তিনটি লম্ব BC, CA এবং AB বাহুর উপর যথাক্রমে অঙ্কিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AD, BE, CF সমবিন্দু।

A, B, C বিন্দুগুলি দিয়া ZY, XZ ও XY তিনটি রেখা যথাক্রমে BC, CA ও ABর সমান্তর করিয়া অঙ্কিত হইল। উহা দ্বারা XYZ ত্রিভুজটি হইল।

প্রমাণ : ABCY এবং ACBZ দুইটি সামান্তরিক,

$\therefore \quad AY = BC = AZ$;

অতএব A, ZYএর মধ্যবিন্দু।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে B ও C, যথাক্রমে ZX ও XYএর মধ্যবিন্দু।

আবার, যেহেতু AD, BCর উপর লম্ব, অতএব উহা সমান্তর সরল রেখা ZYএর উপরও লম্ব। এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে BE ও CF যথাক্রমে ZX ও XYএর উপর লম্ব।

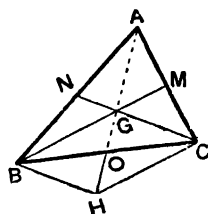
এখন ZYX ত্রিভুজের বাহু তিনটির মধ্যবিন্দুতে AD, BE ও CF লম্বভাবে থাকায়, উহারা সমবিন্দু।

$\therefore$ AD, BE, CF সমবিন্দু।

৩। একটি ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। এবং সাধারণ ছেদবিন্দু মধ্যমাগুলির প্রত্যেকটিকে দুই ভাগে বিভক্ত করে, তন্মধ্যে শীর্ষবিন্দুর সমীপবর্তী ভাগ অপর ভাগের দ্বিগুণ।

[The three medians of a triangle are concurrent and this common point divides each of the medians into two parts of which the part nearer the vertex is double the other.]

ABC ত্রিভুজের BM ও CN দুইটি মধ্যমা G বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। AG যোগ করিয়া BC বাহু পর্যন্ত বর্ধিত কর। উহা BCকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AO আর একটি মধ্যমা।

অঙ্কন : B বিন্দু দিয়া NCর সমান্তরাল করিয়া BH অঙ্কিত কর। AO বর্ধিত করায় উহা AOকে H বিন্দুতে ছেদ করিল।

CH যোগ কর।

প্রমাণ : ABH ত্রিভুজে ABর মধ্যবিন্দু N দিয়া NG, BHএর সমান্তরাল।

$\therefore$ G, AHএর মধ্যবিন্দু ;

আবার, M ও G যথাক্রমে AC ও AHএর মধ্যবিন্দু,

∴ MG বা BM, CHএর সমান্তরাল ;

অতএব, BGCH একটি সামান্তরিক ;

আর, ইহার কর্ণগুলি পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে,

∴ O, BCর মধ্যবিন্দু

অর্থাৎ AO, ABC ত্রিভুজের মধ্যমা।

তাহা হইলে, BM, CN ও AO, G বিন্দুতে সমবিন্দু হইল।

আবার, $AG = 2GO$, $BG = 2GM$, $CG = 2GN$;

কারণ, $AG = GH = 2GO$ ইত্যাদি।

এইরূপে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে

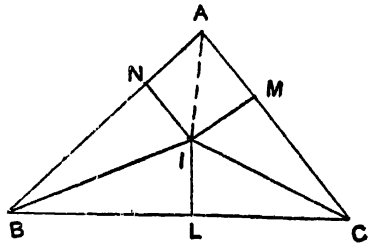
$BG = 2GM$ এবং $CG = 2GN$.

সংজ্ঞা। ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির ছেদবিন্দুকে **ভরকেন্দ্র** (centroid) বলে। উপরের G বিন্দু ভরকেন্দ্র।

৪। একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

[The bisectors of the angles of a triangle are concurrent.]

ABC ত্রিভুজের, ABC, ACB কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডক BI, CI, I বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। AI যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AI, ∠BACর সমদ্বিখণ্ডক।

I বিন্দু হইতে, BC, CA ও ABর উপর IL, IM ও IN এই তিনটি লম্ব অঙ্কিত কর।

প্রমাণ ঃ BNI, BLI ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

$\angle IBN = \angle IBL$ (অঙ্কনসিদ্ধ),

$\angle INB = \angle ILB$ (প্রত্যেকে এক সমকোণের সমান)

এবং IB উভয়ের সাধারণ বাহু ;

$\therefore$ IN = IL.

এইরূপে CMI, CLI ত্রিভুজদ্বয় হইতে প্রমাণিত হয় যে IM = IL ;

$\therefore$ IN = IM.

এখন, ANI, AMI এই দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যে

অতিভুজ AI সাধারণ বাহু এবং IN = IM ;

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

$\therefore$ $\angle IAN = \angle IAM$

$\therefore$ AI, $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক ;

অতএব, AI, BI, CI দ্বিখণ্ডক তিনটি I বিন্দুতে সমবিন্দু।

অনু.। ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি হইতে I বিন্দু সমদূরবর্ত্তী।

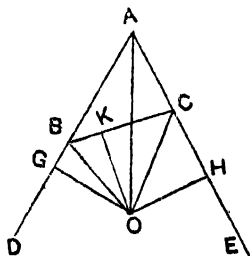
কারণ IL = IM = IN.

৫। একটি ত্রিভুজের দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও অন্তঃস্থ তৃতীয় কোণটির সমদ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।

[The bisectors of two exterior angles of a triangle and the bisector of the third interior angle are concurrent.]

ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার AB ও AC বাহু যথাক্রমে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে।

DBC, ECB কোণ দুইটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। সমদ্বিখণ্ডক দুইটি O বিন্দুতে মিশিল। AO যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AO, $\angle BAC$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

O বিন্দু হইতে বাহুগুলির উপর OG, OK, OH তিনটি লম্ব অঙ্কিত কর।

প্রমাণ : BOG, BOK ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

$\angle GBO = \angle KBO$;

$\angle BGO = \angle BKO$ (কারণ, প্রত্যেকে এক সমকোণ)

এবং BO সাধারণ বাহু ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

∴ $OG = OK$.

একই রূপে COH, COK ত্রিভুজ দুইটির

$OH = OK$;

অতএব, $OG = OH = OK$.

আবার, AOG, AOH সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

$GO = HO$, অতিভুজ AO সাধারণ বাহু ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

∴ $\angle GAO = \angle HAO$.

∴ AO, $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক ;

অতএব, সমদ্বিখণ্ডক তিনটি O বিন্দুতে মিশিয়াছে।

অনুশীলনী (১৯)

[বিবিধ]

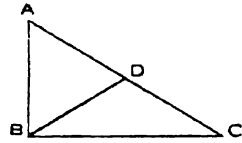
১। ABC একটি ত্রিভুজ। D, AC বাহুর মধ্যবিন্দু ; BD যুক্ত কর। যদি $BD = \frac{1}{2} AC$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর $\angle ABC$ একটি সমকোণ।

২। কোন ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি মধ্যমা সমান হইলে উহা একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

৩। কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখা অতিভুজের অর্ধেকের সমান।

[In a right-angled triangle the straight line joining the middle point of the hypotenuse to the opposite angular point is equal to half the hypotenuse.]

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ; উহার ABC কোণটি সমকোণ, এবং AC অতিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে B হইতে ACর মধ্যবিন্দু D পর্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখা ACর অর্ধেকের সমান।

AB সরল রেখার B বিন্দুতে ABD কোণটি CAB কোণের সমান করিয়া কাটিয়া লও; মনে কর BD, অতিভুজ ACকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ: $\angle ABD = \angle DAB$

$\therefore \quad AD = DB$

আবার $\angle ABC = \angle BAC + \angle ACB$

অতএব $\angle DBC = \angle BCD$

$\therefore \quad BD = CD$

সুতরাং $AD = BD = CD$

$\therefore BD = \frac{1}{2}AC$ অর্থাৎ BD, অতিভুজ ACর অর্ধেকের সমান।

৪। প্রমাণ কর, ত্রিভুজের শীর্ষকোণ হইতে ভূমির উপর লম্ব ও শীর্ষ-কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার অন্তর্ভূত কোণ ভূমিস্থিত কোণ দুইটির অন্তর-ফলের অর্ধেকের সমান।

৫। প্রমাণ কর, যে-কোন ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটির সমষ্টি উহার পরিসীমার তিন-চতুর্থাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর।

৬। একটি সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যস্থিত যে-কোন বিন্দু হইতে তিনটি বাহুর উপর তিনটি লম্ব টানিলে উহাদের যোগফল ত্রিভুজটির যে-কোন কৌণিক বিন্দু হইতে উহার সম্মুখস্থ বাহুর উপর পতিত লম্বের সমান হইবে।

৭। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (AB = AC). ∠ABC ও ∠ACB যথাক্রমে BD ও CE দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, D ও Eর সংযোজক সরল রেখা BCর সহিত সমান্তরাল।

৮। যদি কতকগুলি ত্রিভুজ একই ভূমির উপর, এবং উহাদের শীর্ষসমূহ ভূমির সমান্তরাল কোনও রেখায় অবস্থিত থাকে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, উহাদের মধ্যে যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু তাহার পরিসীমা ক্ষুদ্রতম।

৯। ABC ত্রিভুজে AB>AC. D ও E যথাক্রমে AB ও ACর মধ্যবিন্দু। BE, CD যুক্ত কর। প্রমাণ কর যে BE>CD.

১০। প্রমাণ কর যে, একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যুক্ত করিলে একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

১১। ABC ত্রিভুজে BAC কোণটি সূক্ষ্ম কোণ; A হইতে BC বাহুর মধ্যবিন্দু D যুক্ত কর। প্রমাণ কর যে, AD>DC.

১২। ABCD একটি চতুর্ভুজ। E ও F যথাক্রমে AB ও DCর মধ্যবিন্দু। EF যুক্ত করিলে যদি EF, AB এবং DCর প্রত্যেকটির উপর লম্ব হয়, তাহা হইলে AD, BCর সমান হইবে।

১৩। প্রমাণ কর যে, যে-কোন চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির সমষ্টির দ্বিগুণ ঐ চতুর্ভুজের পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

১৪। কোন চতুর্ভুজের পক্ষে এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর, যাহা হইতে ঐ চতুর্ভুজের শীর্ষগুলির দূরত্বের সমষ্টি ক্ষুদ্রতম।

১৫। কোন একটি সামান্তরিকের যে-কোন কৌণিক বিন্দু হইতে একটি সরল রেখা টানিয়া ঐ কৌণিক বিন্দুর বিপরীত কৌণিক বিন্দু হইতে উহার উপর একটি লম্ব টান। প্রমাণ কর যে কোন কোন স্থলে এই অঙ্কিত লম্ব অবস্থাভেদে সামান্তরিকের অবশিষ্ট কৌণিক বিন্দুদ্বয় হইতে ঐ সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির যোগ বা বিয়োগফলের সমান।

দ্বিতীয় খণ্ড

দ্বিতীয় খণ্ড

প্রথম অধ্যায়

ক্ষেত্রফল

(Area)

১। কোন সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের পরিমাণকে উহার **ক্ষেত্রফল** বা **কালি** বলে।

২। কোন রাশির পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইলে সেই জাতীয় কোন নির্দিষ্ট রাশির সহিত তাহার তুলনা করিতে হয়। ঐ নির্দিষ্ট রাশির তুলনায় উক্ত রাশি তাহার কত গুণ বা কত ভাগের ভাগ তাহা নির্ণয় করা যায়। ঐ পরিমাপক রাশিকে **একক রাশি** বা শুধুমাত্র **একক** (unit) বলা হয়।

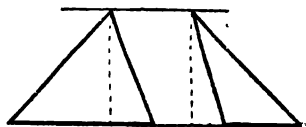
যেমন কোন দৈর্ঘ্য মাপিতে গেলে, আমরা 1 ইঞ্চির সমান দৈর্ঘ্যকে একক লইয়া বলিতে পারি, যে দৈর্ঘ্য মাপিতে হইবে, তাহা কত ইঞ্চি।

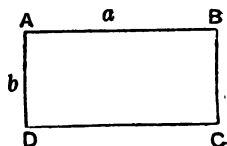
বিভিন্ন একক গ্রহণ করিলে একই রাশির বিভিন্ন মাপ হইবে। ইঞ্চি একক ধরিলে যে দৈর্ঘ্যের যাহা মাপ হইবে, ফুট একক হইলে তাহার মাপ 12 ভাগের এক ভাগ হইবে।

৩। ক্ষেত্রফলের পরিমাণ নির্ণয় করিতে গেলে, তাহার একক অন্য কোন ক্ষেত্রফল লইতে হইবে। যে-কোন ক্ষেত্রফলকেই অবশ্য লওয়া যায়; কিন্তু সাধারণত ইঞ্চি, ফুট, গজ প্রভৃতি একক পরিমাণ দীর্ঘ রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে ক্ষেত্রফলের এককরূপে ধরা হয়। অর্থাৎ একক পরিমাণ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলই ক্ষেত্র পরিমাণের একক স্বরূপে গৃহীত হয়।

সংজ্ঞা

সামান্তরিকের (বা ত্রিভুজের) যে-কোন বাহুকেই **ভূমি** (base) বলিয়া অভিহিত করা যায়।

ঐ নির্দিষ্ট ভূমি হইতে বিপরীত বাহুর লম্ব পরিমাণ দূরত্বকে সামান্তরিকের (বা ত্রিভুজের) **উচ্চতা** বা **উন্নতি** (altitude) বলা হয়।

একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্যের পরিমাণকে বিস্তারের পরিমাণ দিয়া গুণ করিলে, গুণফল উহার **ক্ষেত্রফল** হইবে।

ABCD একটি আয়তক্ষেত্র ; উহার দৈর্ঘ্য যদি a ইঞ্চি হয় এবং বিস্তার b ইঞ্চি হয়, তবে ABCDর ক্ষেত্রফল $= a \times b$ বর্গ ইঞ্চি।

অর্থাৎ, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

তাহা হইলে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

= (দৈর্ঘ্য)^2 বা (প্রস্থ)^2

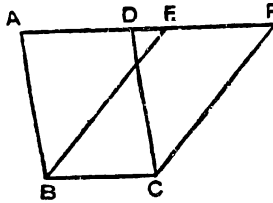
অর্থাৎ যে-কোন একটি (বাহু)^2.

মন্তব্য : ABCD ক্ষেত্রটিকে AC বা DB ক্ষেত্র বলা হয় অথবা, AD, DC বা AB, BC দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রও বলা হয়।

ক্ষেত্রফল সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

২৭শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।৩৫)

একই ভূমি এবং একই সমান্তরালের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সমান।

[Parallelograms on the same base and between the same parallels are equal in area.]

ABCD ও EBCF দুইটি সামান্তরিক, একই ভূমি BC ও একই সমান্তরাল AF, BCর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, সামান্তরিক ABCDর ক্ষেত্রফল = সামান্তরিক EBCFএর ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ : FDC ও EAB ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

DC = বিপরীত বাহু AB

বহিঃস্থ ∠FDC = অন্তঃস্থ বিপরীত ∠EAB

অন্তঃস্থ ∠DFC = বহিঃস্থ ∠AEB

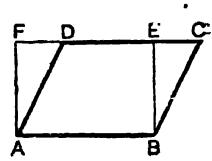
∴ △FDC = △EAB.

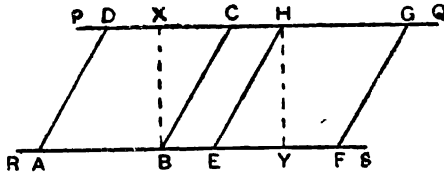
এখন, সমগ্র ক্ষেত্র ABCF হইতে, সমান সমান অংশ △ABE ও △FCD বাদ দিলে অবশিষ্ট অংশগুলি পরস্পর সমান।

∴ সামান্তরিক ABCDর ক্ষেত্রফল

রিক EBCFএর ক্ষেত্রফল।

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

মনে কর, ABCD সামান্তরিক এবং ABEF আয়তক্ষেত্র একই ভূমি ABর উপর অবস্থিত এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট। BE ইহাদের উচ্চতা। এখন ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ABEF আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= AB. BE = **ভূমি × উচ্চতা**।

অনু. ১। দুইটি সমান্তরাল সরল রেখার মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিক বা ত্রিভুজগুলির উচ্চতা সমান।

PQ ও RS দুইটি সমান্তরাল সরল রেখা এবং ABCD ও EFGH সামান্তরিক দুইটি ইহাদের মধ্যে অবস্থিত। XB ও HY উভয় সামান্তরিকের উচ্চতা।

BYHX একটি আয়তক্ষেত্র হইল; সুতরাং XB = HY.

অনু. ২। কতকগুলি সামান্তরিক বা ত্রিভুজের উন্নতি সমান হইলে, তাহাদিগকে দুইটি সমান্তরাল সরল রেখার মধ্যে স্থাপন করা যায়।

উপরের চিত্রে XB = HY এবং উভয়ে RS সরল রেখার উপর লম্ব,

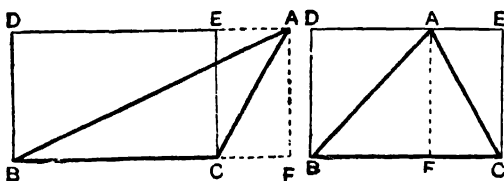
অতএব XB ‖ HY; ∴ PQ ‖ RS.

অনু. ৩। সমান ভূমি এবং সমান উচ্চতাবিশিষ্ট অর্থাৎ একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

[Parallelograms on equal bases and between the same parallels are equal in area. *Euc*. 1. 36.]

২৮শ উপপাদ্য (ইউক্লিড, ১।৪১)

যদি একটি ত্রিভুজ ও একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমিতে অবস্থিত এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

[The area of a triangle is half the area of a rectangle on the same base and having the same altitude.]

(১নং চিত্র) (২নং চিত্র)

ABC একটি ত্রিভুজ এবং BDEC একটি আয়তক্ষেত্র। উহাদের একই ভূমি BC, এবং একই উচ্চতা AF.

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\triangle$ABCর ক্ষেত্রফল = BDEC আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

প্রমাণঃ যেহেতু AF, BCর উপর লম্ব, BDAF ও FAEC দুইটি আয়তক্ষেত্র।

যেহেতু, কর্ণ AB, BDAF আয়তক্ষেত্রটিকে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে,

∴ $\triangle$ABF, BDAF আয়তক্ষেত্রের অর্ধেক ;

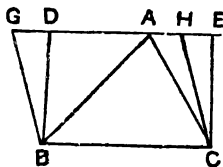
এইরূপে, $\triangle$AFC, FAEC আয়তক্ষেত্রের অর্ধেক।

তাহা হইলে, প্রথম চিত্রে ফল দুইটি বিয়োগ করিয়া এবং দ্বিতীয় চিত্রে ফল দুইটি যোগ করিয়া পাওয়া গেল—

$\triangle$ABC, BDEC আয়তক্ষেত্রের অর্ধেক।

অনু. ১। কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল একই ভূমির উপর এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

যেহেতু, $\triangle$ABC $= \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র BCED এবং আয়তক্ষেত্র BCED = সামান্তরিক BCHG,

(উভয়ে একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল রেখা দুইটির মধ্যে অবস্থিত)

$\therefore$ $\triangle$ABC $= \frac{1}{2}$ সামান্তরিক BCHG.

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

যদি দৈর্ঘ্য BC $= a$, এবং AF $= h$ হয়, তাহা হইলে BDEC আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= ah$.

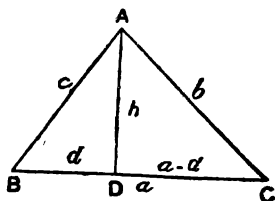
$\therefore$ $\triangle$ABC $= \frac{1}{2}ah$.

অর্থাৎ, একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, ত্রিভুজটির ভূমি ও উচ্চতার গুণফলের অর্ধেক ; সংক্ষেপে :—

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা।

তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য হইতে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b এবং c ; A হইতে BCর উপর AD লম্ব টান। এখন মনে কর, AD $= h$, BD $= d$;

$\therefore$ CD $= a - d$.

এখন, $AC^2 - CD^2 = AD^2 = AB^2 - BD^2$

অর্থাৎ $b^2-(a-d)^2=c^2-d^2$

$\therefore\ b^2-a^2+2ad-d^2=c^2-d^2$

অর্থাৎ, $2ad=c^2+a^2-b^2,$

$$\therefore\quad d=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$$

এখন, $h^2=c^2-d^2=c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2$

$$=\frac{(2ac)^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{(2ac+c^2+a^2-b^2)(2ac-c^2-a^2+b^2)}{4a^2}$$

$$=\frac{\{(c+a)-b^2\}\{b^2-(c-a)^2\}}{4a^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a-b+c)(b-c+a)(b+c-a)}{4a^2}$$

মনে কর, $a+b+c=2s$

$\therefore\quad c+a-b=(a+b+c)-2b=2(s-b)$

$b+c-a=(a+b+c)-2a=2(s-a)$

$b-c+a=(a+b+c)-2c=2(s-c)$

$$\therefore\qquad h^2=\frac{2s.2(s-a).2(s-b).2(s-c)}{4a^2}$$

$\therefore\qquad a^2h^2=4s(s-a)(s-b)(s-c)$

$ah=2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

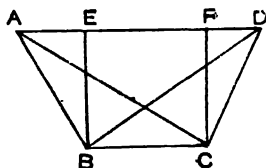
ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\text{BC}\cdot\text{AD}=\frac{1}{2}ah$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

দ্রষ্টব্য : উপরোক্ত প্রমাণটি **ব্রহ্মগুপ্তের** আবিষ্কৃত

২৯শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।৩৭)

একই ভূমির উপর, এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত (অর্থাৎ একই উচ্চতাবিশিষ্ট) ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

[Triangles on the same base and between the same parallels (hence of the same altitude) are equal in area.]

ABC, DBC ত্রিভুজ দুইটি একই ভূমি BCর উপর অবস্থিত এবং একই সমান্তরাল রেখা AD, BCর মধ্যে অবস্থিত (অতএব, ইহাদের উচ্চতাও সমান)।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\triangle ABC$ ও $\triangle DBC$র ক্ষেত্রফল সমান।

প্রমাণ : মনে কর EBCF একটি আয়তক্ষেত্র BC ভূমির উপর এবং AD, BC সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ $\triangle ABC$র ক্ষেত্রফল = EBCF আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক এবং $\triangle DBC$র ক্ষেত্রফল = EBCF আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক,

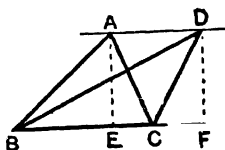
স্থতরাং ক্ষেত্রফলে, $\triangle ABC = \triangle DBC$.

অনু.। সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

[Triangles on equal bases and between the same parallels are equal in area. *Euc.* 1. 38.]

৩০শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ১।৩৯, ৪০)

যদি দুইটি ত্রিভুজ সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট হয় এবং একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত হয়, তাহা হইলে, উহারা একই সমান্তরালের মধ্যে অবস্থিত হইবে।

[If two triangles are equal in area, and stand on the same base and on the same side of it, they are between the same parallels.]

ABC, DBC দুইটি ত্রিভুজ BC ভূমির উপর অবস্থিত এবং ইহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AD ও BC সমান্তরাল।

মনে কর AE, DF উহাদের উচ্চতা।

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল, BC, AEর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

এবং DBC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল BC, DFএর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

∴ BC, AEর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র = BC, DFএর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র।

∴ AE = DF.

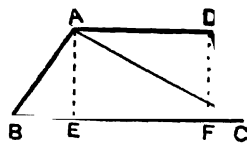
আবার AE, DF সমান্তরাল ;

অতএব, AD ও EF অর্থাৎ BC সমান্তরাল।

ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল

[To find the area of a trapezium.]

ABCD একটি ট্রাপিজিয়ম; ইহার AD ও BC সমান্তরাল। AD ও BCর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a ও b.

A ও D হইতে BCর উপর AE, DF দুইটি লম্ব অঙ্কিত কর। ইহাদের দৈর্ঘ্য h. AC যোগ কর। তাহা হইলে

ABCDর ক্ষেত্রফল $= \triangle ABC + \triangle ADC$

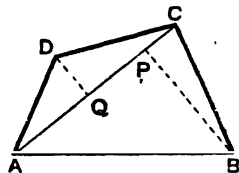
$= \frac{1}{2}. BC. AE + \frac{1}{2}. AD. DF$

$= \frac{1}{2}. b.h + \frac{1}{2}.a.h$

$= \frac{1}{2}. h(a+b).$

চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

[To find the area of a quadrilateral.]

ABCD একটি চতুর্ভুজ; ইহার AC কর্ণটি অঙ্কিত কর এবং D ও B হইতে DQ ও BP দুইটি লম্ব ACর উপর অঙ্কিত কর।

মনে কর দৈর্ঘ, AC, BP ও DQ যথাক্রমে b, p ও q.

এখন ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \triangle ABC + \triangle ADC$

$= \frac{1}{2}. AC. BP + \frac{1}{2}. AC. DQ$

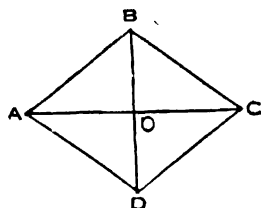
$= \frac{1}{2}. bp + \frac{1}{2}. bq = \frac{1}{2}. b(p+q)$

$= \frac{1}{2}.$ কর্ণ $\times$ (উক্ত কর্ণের উপর অপর কোণ দুইটি হইতে লম্ব দুইটির যোগফল)

রম্বসের ক্ষেত্রফল

[To find the area of a rhombus.]

ABCD একটি রম্বস্। AC, BD উহর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

যেহেতু রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে, অতএব রম্বস্ ABCDর ক্ষেত্রফল

$$=\triangle ABC+\triangle ADC$$
$$=\frac{1}{2}AC\times BO+\frac{1}{2}AC\times DO$$
$$=\frac{1}{2}AC(BO+DO)$$
$$=\frac{1}{2}AC.\ BD$$

$=\frac{1}{2}$কর্ণদ্বয়ের গুণফল।

ঋজুরেখ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

[To find the area of any rectilineal figure.]

ঋজুরেখ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নিম্নোক্ত দুই প্রকারে বাহির করা যায় :—

১। ঋজুরেখ ক্ষেত্রটিকে কয়েকটি ত্রিভুজে বিভক্ত করিয়া ঐ ত্রিভুজ-গুলির পৃথক পৃথক ক্ষেত্রফল বাহির কর। এখন, ঐ ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্র-ফলের সমষ্টিই ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হইবে। এইরূপে ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের প্রণালীকে **Triangulation** বলে।

২। ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির শীর্ষবিন্দুসমূহ হইতে কোন কর্ণের উপর লম্বপাত করিয়া ক্ষেত্রটিকে কয়েকটি ট্রাপিজিয়ম ও ত্রিভুজে বিভক্ত কর। এখন ঐ ট্রাপিজিয়ম ও ত্রিভুজগুলির পৃথক পৃথক ক্ষেত্রফল নির্ণয়-

করিয়া তাহাদের সমষ্টি লইলেই ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল পাওয়া যাইবে। এইরূপে ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের প্রণালীকে **Field-Book** প্রণালী বলে।

মন্তব্য : আজকাল উক্ত দুইটি প্রণালীই জমির জরিপ (survey) প্রভৃতিতে ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

অনুশীলনী (২০)

১। একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিককে চারিটি সমান সামান্তরিকে বিভক্ত কর।

২। ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান সমান দুই অংশে বিভক্ত করিবে।

৩। শীর্ষবিন্দু হইতে সরল রেখা টানিয়া কি ভাবে একটি ত্রিভুজকে সমান তিন ভাগে ভাগ করিবে, দেখাও।

৪। সামান্তরিকের যে-কোন কর্ণ সামান্তরিককে সমান সমান দুই অংশে বিভক্ত করিবে।

৫। প্রমাণ কর যে, কোন সামান্তরিক তাহার কর্ণদ্বয় দ্বারা সমান সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট চারিটি ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে।

৬। প্রমাণ করিয়া দেখাও, যে চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের প্রত্যেকে চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, সেই চতুর্ভুজটি সামান্তরিক।

৭। ত্রিভুজের কোন দুই বাহু নির্দিষ্ট থাকিলে, ঐ বাহুদ্বয় যখন পরস্পর লম্ব থাকে তখনই ঐ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হয়।

৮। চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরল রেখাদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৯। যদি দুই ত্রিভুজের একের দুই বাহু যথাক্রমে অপরের দুই বাহুর সমান হয় এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ দুইটি সম্পূরক হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান হইবে।

১০। যদি কোন সামান্তরিকের একের সন্নিহিত দুই বাহু অপরের সন্নিহিত দুই বাহুর সমান হয়, এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ দুইটি সম্পূরক হয়, তবে প্রমাণ কর যে সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান হইবে।

১১। প্রমাণ কর যে সামান্তরিকের যে-কোন একটি কর্ণের মধ্যবিন্দু হইতে অঙ্কিত যে-কোন সরল রেখা উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

১২। কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় কোন সরল রেখা দ্বারা যুক্ত হইলে যে ত্রিভুজ পাওয়া যায়, তাহা নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সমানকোণী এবং তাহার এক-চতুর্থাংশের সমান হয়।

১৩। চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু-সমূহ যথাক্রমে সংযুক্ত হইলে একটি সামান্তরিক পাওয়া যাইবে এবং উহা চতুর্ভুজের অর্ধাংশের সমান হইবে।

১৪। কোন ত্রিভুজের ভূমি কতকগুলি সমান অংশে বিভক্ত করা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে শীর্ষ হইতে উহাদের ছেদবিন্দু অবধি রেখাগুলি টানিলে, তাহারা ত্রিভুজটিকে সমানসংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

১৫। ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দু যুক্ত করিলে উক্ত যোজক তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হয়।

(২৯শ এবং ৩০শ উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর।)

১৬। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপর যে-কোন বিন্দু হইতে সমান বাহুদ্বয়ের উপর লম্ব টানা হইলে, উহাদের যোগফল সর্বদাই এক থাকে।

১৭। সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যস্থ যে-কোন বিন্দু হইতে বাহু তিনটির উপর লম্ব টানিলে, উহাদের যোগফল সর্বদাই এক থাকে।

১৮। রম্বসের মধ্যস্থ যে-কোন একটি বিন্দু হইতে বাহু চারিটির উপর লম্ব টানিলে, উহাদের যোগফল সর্বদা একই থাকে।

১৯। সামান্তরিকের যে-কোন কর্ণের মধ্যবিন্দু দিয়া যে-কোন এক সরল রেখা টানিলে, তাহা সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। অতএব, কিরূপে একটি সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া, একটি রেখা—

(১) একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া

(২) একটি নির্দিষ্ট রেখার সমান্তরাল করিয়া

(৩) একটি নির্দিষ্ট রেখার সহিত সমকোণ করিয়া

টানা যাইতে পারে, দেখাও।

২০। একটি আয়তক্ষেত্র ও একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু পরস্পর সমান এবং উহারা এক সমান বাহুর উপর অবস্থান করিতেছে। প্রমাণ কর যে, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল অপেক্ষা বৃহত্তর।

২১। একই ভূমির উপর একটি বর্গক্ষেত্র এবং একটি রম্বস্ অবস্থান করিতেছে; প্রমাণ কর যে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল রম্বসের ক্ষেত্রফল অপেক্ষা বৃহত্তর।

২২। AB ভূমির উপর একটি সামান্তরিক ABEF অঙ্কিত আছে। উহার ক্ষেত্রফলের সমান করিয়া একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

২৩। কোন সামান্তরিকের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে চারিটি কৌণিক বিন্দু পর্যন্ত চারিটি সরল রেখা টানিলে পরস্পর সম্মুখীন বাহুদ্বয়ের উপর যে দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত হয়, তাহারা একত্রযোগে সামান্তরিকের অর্ধেকের সমান হয়।

২৪। AD, ABC ত্রিভুজের একটি মধ্যমা। P যদি ADর উপর কোন বিন্দু হয়, তবে প্রমাণ কর—

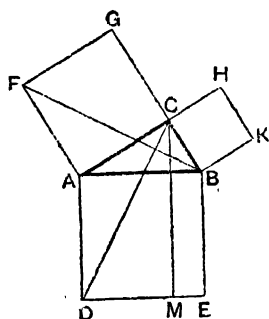
$$\triangle PAB = \triangle PAC.$$

দ্বিতীয় অধ্যায়

পিথাগোরাসের উপপাদ্য

৩১শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ১।৪৭)

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর যে বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায় তাহা অপর দুইটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির যোগফলের সমান।

[In a right-angled triangle the square described on the hypotenuse is equal to the sum of the squares described on the other two sides.]

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, ইহার ∠ACB সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ইহার অতিভুজ ABর উপর বর্গক্ষেত্র, অন্য দুইটি বাহু AC, CBর উপর বর্গক্ষেত্র দুইটির যোগফলের সমান।

অঙ্কন: AB, AC এবং CBর উপর যথাক্রমে ADEB, ACGF এবং CBKH বর্গক্ষেত্র তিনটি অঙ্কিত কর।

C বিন্দু দিয়া AD বা BEর সমান্তরাল করিয়া CM অঙ্কিত কর।

CD, FB যোগ কর।

প্রমাণ : যেহেতু $\angle ACB$ ও $\angle ACG$ প্রত্যেকে এক এক সমকোণ,

অতএব, BC এবং CG একই সরল রেখায় অবস্থিত।

এখন, সমকোণ BAD = সমকোণ FAC.

উভয় পার্শ্বে $\angle CAB$ যোগ কর।

তাহা হইলে, সমগ্র $\angle CAD$ = সমগ্র $\angle FAB$,

এখন CAD, FAB ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

CA = FA, বর্গক্ষেত্রের বাহু বলিয়া

AD = AB

এবং অন্তর্ভূত $\angle CAD$ = অন্তর্ভূত $\angle FAB$;

$\therefore \quad \triangle CAD = \triangle FAB.$

এখন AM আয়তক্ষেত্র ও $\triangle CAD$ একই ভূমি AD ও একই সমান্তরাল রেখা AD, CMএর মধ্যে অবস্থিত।

অতএব AM আয়তক্ষেত্র $\triangle CAD$র দ্বিগুণ।

আবার, GA বর্গক্ষেত্র ও $\triangle FAB$ একই ভূমি FA ও একই সমান্তরাল রেখা FA, GBর মধ্যে অবস্থিত।

অতএব, আয়তক্ষেত্র AM = বর্গক্ষেত্র GA.

($\because \triangle CAD = \triangle FAB$, প্রমাণিত হইয়াছে)

এইরূপে CE ও AK যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

আয়তক্ষেত্র BM = বর্গক্ষেত্র HB.

$\therefore$ সমগ্র বর্গক্ষেত্র AE, GA ও HB বর্গক্ষেত্র দুইটির যোগফলের সমান।

অর্থাৎ অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির যোগফলের সমান।

দ্রষ্টব্য : উপরোক্ত ফল নিম্নোক্তরূপে লেখা যায় :—

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 ;$$

যদি $AB = c$, $BC = a$ এবং $CA = b$ হয়,

তবে, $c^2 = a^2 + b^2$;

তাহা হইলে $a^2 = c^2 - b^2$

দ্রষ্টব্য : বিখ্যাত গ্রীক দেশীয় গণিতজ্ঞ ও দার্শনিক পিথাগোরাসের* (জন্ম ৫৮২ খ্রীঃ পূঃ) আবিষ্কৃত বলিয়া পূর্বোক্ত উপপাদ্যটি **পিথাগোরাসের উপপাদ্য** নামে খ্যাত। কিন্তু হিন্দু ঋষিগণ এই উপপাদ্য স্বাধীন ভাবে আবিষ্কার করিয়াছিলেন। তবে হিন্দুদের একটির পরিবর্তে দুইটি উপপাদ্য আছে। তাহা এই—

(১) সমচতুরস্রস্যাক্ষ্ণায়ারবজ্জুর্দ্বিস্তাবতীং ভূমিং করোতি।

(বৌধায়ণ, আপস্তম্ব ও কাত্যায়ণে প্রায় একই রূপে ঐ শ্লোকটি আছে)

অর্থাৎ, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিলে তাহা উক্ত বর্গক্ষেত্রের দুই গুণ হইবে।

(২) দীর্ঘচতুরস্রস্যাক্ষ্ণায়ারজ্জুঃ পার্শ্বমানী তির্য্যঙ্‌মানী চ
যৎ পৃথগ্‌ভূতে কুরুতস্তদুভয়ং করোতি।

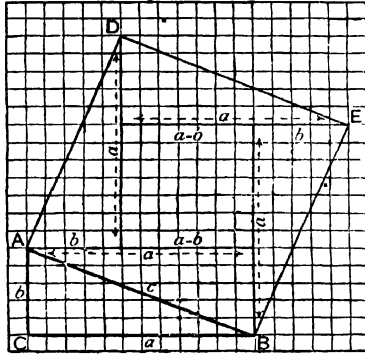
(বৌধায়ন ও আপস্তম্বে একই শ্লোক আছে)

অর্থাৎ, আয়তক্ষেত্রের কর্ণের উপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিলে তাহা বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর বাহু দুইটির উপর দুইটি বর্গক্ষেত্রের যোগফলের সমান হইবে।

[Journal of the Asiatic Society of Bengal—Vol. XLIV (1875) "On the Sulva Sutras" by Dr. G. Thibaut দ্রষ্টব্য]

* পিথাগোরাসের জন্মের বহু পূর্বে মিশরীয়গণ জানিতেন যে একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুদ্বয় যথাক্রমে 3 ও 4 একক হইলে অতিভুজটি 5 একক হইবে ; মিশরদেশে ভূ-পরিমাপকগণ সমকোণ অঙ্কিত করিবার জন্য এক গাছি দড়িতে 3, 4 ও 5 একক পরিমাণ চিহ্নিত করিয়া ব্যবহার করিতেন।

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের পরীক্ষামূলক প্রমাণ

ABC সমকোণী △ ; ABED, অতিভুজ ABর উপর বর্গক্ষেত্র। BC, CAর সমান্তর করিয়া রেখা অঙ্কিত করিয়া দেখা যায় যে BD

বর্গক্ষেত্রটি △ABCর সমান চারিটি সমকোণী △এ বিভক্ত হইয়াছে এবং তাহার সহিত মধ্যস্থলে একটি বর্গক্ষেত্র রহিয়াছে।

অতএব অতিভুজ cরে উপর বর্গক্ষেত্র

= চারিটি সমকোণী ত্রিভুজ + মধ্যস্থ বর্গক্ষেত্র.

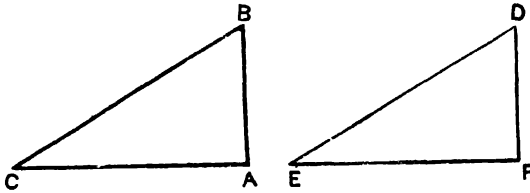
$= 4.\ \frac{1}{2}\ ab + (a-b)^2$

$= 2ab + a^2 - 2ab + b^2$

$= a^2 + b^2.$

৩২শ উপপাদ্য (ইউক্লিড, ১।৪৮)

যদি একটি ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অন্য দুইটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির যোগফলের সমান হয়, তাহা হইলে ঐ দুই বাহুর অন্তর্ভূ্ত কোণটি সমকোণ হইবে।

[If the square described on one side of a triangle is equal to the sum of the squares described on the other two sides, the angle contained by these sides is a right angle.]

ABC একটি ত্রিভুজ, ইহার BCর উপর বর্গক্ষেত্র, AB ও ACর উপর বর্গক্ষেত্র দুইটির যোগফলের সমান ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠BAC এক সমকোণ।

CAর সমান করিয়া EF একটি সরল রেখা লও। EFএর উপর FD একটি লম্ব অঙ্কিত কর এবং FD = AB করিয়া লও।

DE যোগ কর।

প্রমাণ : DFE একটি সমকোণ ;

∴ DEর উপর বর্গক্ষেত্র = EF ও FDর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের যোগফল
= AC ও ABর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের যোগফল
= BCর উপর বর্গক্ষেত্র

∴ DE = BC.

BAC, DFE ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

CA = EF, AB = FD

এবং BC = DE ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

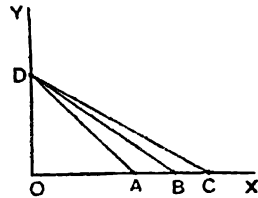
∴ ∠BAC = ∠DFE = এক সমকোণ।

পিথাগোরাসের উপপাদ্য-ঘটিত সম্পাদ্য

১৭শ সম্পাদ্য

কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ, ত্রিগুণ, চতুর্গুণ ইত্যাদি আর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a square twice, thrice, four times etc., a given square.]

OX ও OY দুইটি সরল রেখা পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহুর সমান করিয়া OA ও OD কাটিয়া লও ; DA যোগ কর। DAর সহিত সমান করিয়া OB কাটিয়া লও ; DB যোগ কর ; এবং DBর সহিত সমান করিয়া OC কাটিয়া লও ; DC যোগ কর।

তাহা হইলে, DA, DB ও DCর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র OAর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের যথাক্রমে, দ্বিগুণ, ত্রিগুণ ও চতুর্গুণ হইবে।

প্রমাণ : $DA^2 = OD^2 + OA^2 = 2OA^2$

$$DB^2 = OD^2 + OB^2 = OD^2 + DA^2$$
$$= OD^2 + 2OA^2 = 3OA^2$$
$$DC^2 = OD^2 + OC^2 = OD^2 + DB^2$$
$$= OD^2 + 3OA^2 = 4OA^2.$$

মন্তব্য ১ : উপরোক্ত উপায়ে $5OA^2$, $6OA^2$, $7OA^2$ ইত্যাদি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায়।

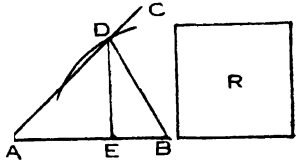
মন্তব্য ২ : যদি $OA = 1$ হয় তবে $DA = \sqrt{2}$, $DB = \sqrt{3}$, $DC = \sqrt{4}$ ইত্যাদি হইবে ; এই প্রকারে কোন সীমাবদ্ধ রেখাকে একক ধরিয়া প্রত্যেক পূর্ণ সংখ্যার বর্গমূল সরল রেখা দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে।

অনুশীলনী (২১)

১। একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এমন দুই অংশে ভাগ কর যেন উহাদের বর্গসমষ্টি একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

AB একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং R নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

A বিন্দুতে 45°র সমান করিয়া ∠BAC অঙ্কিত কর।

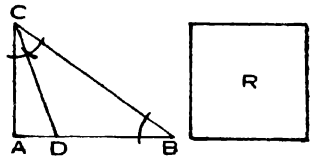
B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া, R বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর; চাপটি ACকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। D হইতে ABর উপর DE একটি লম্ব অঙ্কিত কর। তাহা হইলে AB সরল রেখা E বিন্দুতে উদ্দিষ্টভাবে বিভক্ত হইল।

BD যোগ কর।

প্রমাণ : ∠EDA = ∠EAD (প্রত্যেকে 45°র সমান বলিয়া)

∴ DE = AE

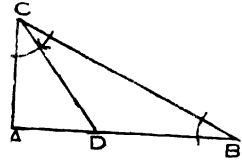
এখন বর্গক্ষেত্র $R = BD^2 = BE^2 + ED^2 = BE^2 + AE^2$.

২। একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এমন দুই ভাগে বিভক্ত কর যেন উহাদের বর্গদ্বয়ের অন্তরফল একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

AB নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং R নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র। A বিন্দুতে AC লম্ব টান এবং ACকে R বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান করিয়া লও। BC যুক্ত কর। BCর C বিন্দুতে ∠CBAর সমান করিয়া ∠BCD অঙ্কিত কর।

মনে কর CD, BA (বা বর্ধিত BA)কে D বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে AB, D বিন্দুতে উদ্দিষ্টভাবে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ : যেহেতু $\angle DBC = \angle BCD$, $\therefore$ $CD = BD$;
অতএব $DB^2 - AD^2 = CD^2 - AD^2 = AC^2 = R^2$.

৩। একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন এক অংশের উপর বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ হয়।

AB নির্দিষ্ট সরল রেখা। B বিন্দুতে $22\frac{1}{2}°$র সমান করিয়া $\angle ABC$ অঙ্কিত কর। A বিন্দুতে অঙ্কিত AC লম্ব BCকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC সরল রেখার C বিন্দুতে $\angle ABC$র সমান করিয়া $\angle BCD$ অঙ্কিত কর। মনে কর CD, ABকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে AB সরল রেখা, D বিন্দুতে উদ্দিষ্ট ভাবে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ : $\angle ADC = \angle DCB + \angle DBC = 45°$

$\therefore$ $\angle ACD = 45°$

অতএব $AD = AC$

$\therefore$ $DB^2 = DC^2 = AC^2 + AD^2 = 2AD^2$.

৪। প্রমাণ কর যে, কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র উক্ত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

৫। কোন বর্গক্ষেত্রের (১) দ্বিগুণ, (২) অর্ধেক বর্গক্ষেত্র কিরূপে অঙ্কন করা যাইবে, দেখাও।

৬। দুই নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের (১) যোগফলের, (২) বিয়োগফলের সমান করিয়া দুইটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

৭। ABC একটি ত্রিভুজ; BC বাহুর উপর M এমন একটি বিন্দু যে, $AB^2 = BC.\ BM$ এবং $AC^2 = BC.\ CM$ হইয়াছে। প্রমাণ করিয়া দেখাও যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

৮। সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্ম কোণদ্বয় হইতে দুইটি মধ্যমা টানা হইল। উহাদের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির চারি গুণ = উক্ত ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের পাঁচ গুণ।

৯। ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার মধ্যস্থিত কোন বিন্দু O হইতে BC, CA, AB বাহুর উপর যথাক্রমে OX, OY, OZ তিনটি লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2.$$

১০। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। A হইতে BCর উপর AM লম্বের পরিমাণ p এবং যথা নির্দিষ্ট তিনটি বাহুর পরিমাণ a, b, c ধরিলে, $pa = bc$.

ইহা হইতে প্রমাণ কর $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. [$a^2 = b^2 + c^2$.]

১১। ABCD একটি চতুর্ভুজ। উহার কর্ণদ্বয় সমকোণ সৃষ্টি করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 + CD^2 = BC^2 + CD^2$.

১২। ABC একটি ত্রিভুজ। $\angle A$ সমকোণ। D বিন্দুটি ACর উপরিস্থিত কোন বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2.$$

১৩। ABCD একটি আয়তক্ষেত্র। উহার ভিতরে কোন বিন্দু P লও। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

১৪। ABC একটি ত্রিভুজ। $\angle C$ একটি সূক্ষ্ম কোণ। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 < AC^2 + BC^2$.

১৫। উপরের উদাহরণ হইতে প্রমাণ করিতে হইবে যে যদি ABC ত্রিভুজে $AB^2 > AC^2 + BC^2$, তাহা হইলে $\angle ACB$ = স্থূল কোণ।

১৬। ABC একটি ত্রিভুজ। $\angle C$ = সমকোণ। $\angle A = 60°$. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB = 2AC.$$

$$3AB^2 = 4BC^2$$

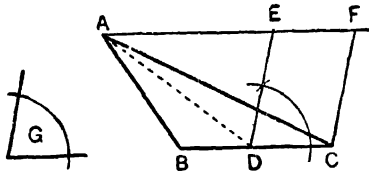
এবং $BC^2 = 3AC^2$.

তৃতীয় অধ্যায়

ক্ষেত্রফল-ঘটিত সম্পাদ্য

১৮শ সম্পাদ্য (ইউক্লিড্ ১।৪২)

একটি ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে এবং উহার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান করিতে হইবে।

[To describe a parallelogram equal to a given triangle and having one of its angles equal to a given angle.]

ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং ∠G একটি নিৰ্দিষ্ট কোণ।

ABCর ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে এবং উহার একটি কোণ ∠Gর সমান হইবে।

অঙ্কন : BCকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। D বিন্দুতে ∠Gর সমান করিয়া CDE কোণ অঙ্কিত কর।

A বিন্দু দিয়া AEF, BCর সমান্তর করিয়া অঙ্কিত কর।

C বিন্দু দিয়া CF, DEর সমান্তর করিয়া অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে EDCF উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ : AD যোগ কর।

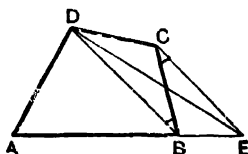
এখন △ADC, △ABD সমান ভূমি ও একই উচ্চতাবিশিষ্ট হওয়ায়, উহাদের ক্ষেত্রফল সমান অর্থাৎ △ADC = $\frac{1}{2}$. △ABC.

আবার, △ADC ও সামান্তরিক EC সমান উচ্চতা এবং একই ভূমিবিশিষ্ট হওয়ায় △ADC = $\frac{1}{2}$. EC সামান্তরিক ;

∴ △ABC = সামান্তরিক EC এবং ∠EDC = ∠G. (অঙ্কনসিদ্ধ)

১৯শ সম্পাদ্য

একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a triangle equal in area to a given quadrilateral.]

ABCD একটি চতুর্ভুজ। ইহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন: DB যোগ কর।

C বিন্দু দিয়া DBর সমান্তর করিয়া CE অঙ্কিত কর এবং উহাকে AB বর্ধিত করিয়া E বিন্দুতে মিশাইয়া দাও।

DE যোগ কর।

তাহা হইলে DAE উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: DBE ও DBC ত্রিভুজ দুইটি একই ভূমি DB ও একই সমান্তর রেখা DB, CEর মধ্যে রহিয়াছে।

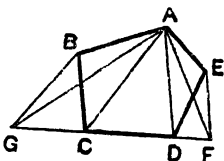
অতএব, ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

এখন ঐ সমান সমান ত্রিভুজ দুইটির সহিত $\triangle$DAB যোগ কর,

তাহা হইলে, $\triangle$DAE = চতুর্ভুজ ABCD.

অনুসিদ্ধান্ত। একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান করিয়া একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle equal to a given rectilineal figure.]

ABCDE একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র। AC, AD যোগ কর। B ও E বিন্দু দিয়া AC ও ADর সমান্তর করিয়া BG ও EF অঙ্কিত কর। CD উভয় পার্শ্বে বর্ধিত করিয়া উহাদের সহিত G ও F বিন্দুতে মিশাইয়া দাও। AG ও AF যোগ কর।

AGF উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

যেহেতু, $\triangle AGC = \triangle ABC$,

উভয় পার্শ্বে $\triangle ACD$ যোগ কর,

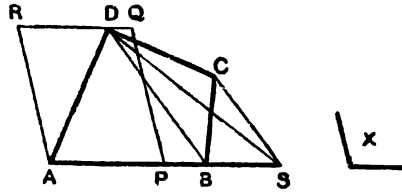
$\therefore \quad \triangle AGD =$ ক্ষেত্র ABCD.

আবার, $\triangle AFD = \triangle ADE$;

$\therefore$ সমগ্র $\triangle AGF =$ সমগ্র ক্ষেত্র ABCDE.

২০শ সম্পাদ্য (ইউক্লিড্ ১।৪৫)

কোন নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

[To construct a parallelogram equal in area to a given rectilineal figure, and having one of its angles equal to a given angle.]

ABCD একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র এবং ∠X একটি নির্দিষ্ট কোণ। উহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার একটি কোণ X কোণের সমান হইবে।

অঙ্কন : DB যোগ কর। C বিন্দু দিয়া DBর সমান্তরাল করিয়া CS রেখা টান। উহা AB রেখা বর্ধিত করায় উহার S বিন্দুতে ছেদ করিল।

DS যোগ কর।

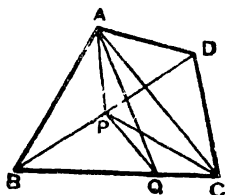
তাহা হইলে, ত্রিভুজ DAS = ঋজুরেখ ক্ষেত্র ABCD (সঃ ১৯ অনুঃ)।

ADS ত্রিভুজের সমান করিয়া APQR সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর, যাহার ∠RAP, ∠Xএর সমান হইবে। (১৮শ সম্পাদ্য)

তাহা হইলে, APQR সামান্তরিক = ত্রিভুজ ADS = ঋজুরেখ ক্ষেত্র ABCD এবং ইহার ∠RAP = ∠X.

২১শ সম্পাদ্য

যে-কোন কৌণিক বিন্দু দিয়া সরল রেখা টানিয়া একটি চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a quadrilateral by a straight line drawn through an angular point.]

ABCD একটি চতুর্ভুজ, ইহার কৌণিক বিন্দু A হইতে একটি সরল রেখা টানিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কবিতে হইবে।

অঙ্কন: BD এবং AC যোগ কর এবং BDকে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। P হইতে ACর সমান্তরাল করিয়া PQ রেখা অঙ্কিত কর। উহা BCকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল, AQ যোগ কর।

তাহা হইলে, AQ, ABCD চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ: AP, PC যোগ কর।

$$\triangle AQC = \triangle APC$$

$$\therefore \triangle ABC - \triangle AQC = \triangle ABC - \triangle APC$$

অর্থাৎ, $\triangle ABQ = ABCP$ ক্ষেত্র।

কিন্তু, $ABCP$ ক্ষেত্র $= \triangle ABP + \triangle CBP$

$= \frac{1}{2}\triangle ABD + \frac{1}{2}\triangle CBD$

$= \frac{1}{2}ABCD$ চতুর্ভুজ ;

$\therefore \triangle ABQ = \frac{1}{2}ABCD$ চতুর্ভুজ

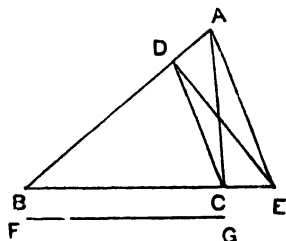
অর্থাৎ AQ, ABCD চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

অনুশীলনী (২২)

[বিবিধ]

১। কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান করিয়া একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

[On a given base to construct a triangle equal to a given triangle.]

DBE নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং FG নির্দিষ্ট ভূমি। BE হইতে FGর সমান করিয়া BC কাটিয়া লও (আবশ্যক হইলে বর্ধিত করিয়া)। DC যোগ কর। E বিন্দু দিয়া CDর সমান্তর করিয়া EA অঙ্কিত কর এবং উহাকে, BD বর্ধিত করিয়া (আবশ্যক হইলে) A বিন্দুতে মিশাইয়া দাও।

AC যোগ কর। তাহা হইলে, ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : △DEC = △DAC (একই ভূমি DC এবং একই সমান্তর রেখা DC ও AEর মধ্যে অবস্থিত বলিয়া)।

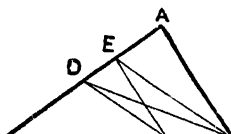
উভয় পার্শ্বে △BDC যোগ কর,

তাহা হইলে, △DBE = △ABC.

২। একটি ত্রিভুজের কোন বাহুর উপর অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া সরল রেখা অঙ্কিত করিয়া ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a triangle by a staight line drawn through a given point in one side of it.]

ABC একটি ত্রিভুজ। E ইহার AB বাহুর উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

অঙ্কন : ABকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

CD, CE যোগ কর।

D বিন্দু দিয়া ECর সমান্তর করিয়া DF অঙ্কিত কর। ইহা BCকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। EF যোগ কর।

তাহা হইলে EF, △ABCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ: △EDF = △DFC, যেহেতু ইহারা DF ভূমি ও DF, EC সমান্তর রেখা দুইটির মধ্যে অবস্থিত।

উভয় পার্শ্বে △DBF যোগ কর;

∴ △BEF = △BDC.

কিন্তু যেহেতু, BD = DA,

△BDC = $\frac{1}{2}$△ABC,

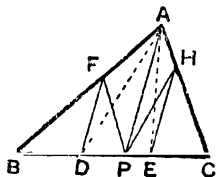
∴ △BEF = $\frac{1}{2}$△ABC.

অতএব EF, △ABCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

৩। একটি ত্রিভুজের কোন বাহুর উপর অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া সরল রেখা অঙ্কিত করিয়া ত্রিভুজটিকে ত্রিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To trisect a triangle by straight lines drawn through a given point on any of its sides.]

ABC একটি ত্রিভুজ। P ইহার BC বাহুর উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

অঙ্কন: BCকে D ও E বিন্দুতে ত্রিখণ্ডিত কর।

AP যোগ কর। D ও E বিন্দু দুইটি দিয়া APর সমান্তর করিয়া DF ও EH অঙ্কিত কর।

PF ও PH যোগ কর।

প্রমাণ: AD, AE যোগ কর।

△DFP = △AFD, কারণ ইহারা DF ভূমির উপর ও একই সমান্তরের মধ্যে রহিয়াছে।

উভয় পার্শ্বে $\triangle BFD$ যোগ কর।

∴ $\triangle BFP = \triangle ABD$.

একই রূপে, $\triangle CHP = \triangle AEC$.

কিন্তু $\triangle ABD$, $\triangle AEC$ দুইটির প্রত্যেকে $\triangle ABC$র এক-তৃতীয়াংশ (যেহেতু, $BD = DE = EC$),

∴ $\triangle BFP$ ও $\triangle CHP$ প্রত্যেকে $\triangle ABC$র এক-তৃতীয়াংশ ;

∴ অবশিষ্ট ক্ষেত্র $PFAH = \frac{1}{3}.\triangle ABC$.

অতএব, FP ও PH, $\triangle ABC$কে ত্রিখণ্ডিত করিয়াছে।

৪। এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা এক নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান হয় এবং যাহার এক বাহু নির্দিষ্ট বাহুর এবং এক কোণ নির্দিষ্ট ত্রিভুজের এক কোণের সমান হয়।

৫। এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা এক নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান হইবে এবং যাহার একটি কোণ এক নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

৬। কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের উপর একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর ; ইহার ক্ষেত্রফল নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক কর।

৭। ABC ত্রিভুজের BC বাহু বর্ধিত কর। বর্ধিতাংশে P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু আছে। AB বাহুর উপর এমন ভাবে E বিন্দু লও যাহাতে $\triangle EPD = \triangle ABC$ হইতে পারে।

৮। ABC একটি ত্রিভুজ, O একটি বহিঃস্থ বিন্দু। ABCর সমান এমন একটি ত্রিভুজ আঁক, যেন উহার শীর্ষ O বিন্দুতে থাকে এবং উহার ভূমি BC ভূমির সহিত একই সরল রেখায় অবস্থান করে।

৯। এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর, যাহার এক কোণ এক নির্দিষ্ট কোণের সমান এবং যাহার ক্ষেত্রফল এক নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান হইয়াছে।

১০। কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপরে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ সৃজন কর।

১১। কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র সৃজন কর।

১২। কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপরে এমন একটি আয়তক্ষেত্র রচনা কর, যাহা একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান হইবে।

১৩। কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান আর একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর।

১৪। এক নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান এক আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর।

১৫। কোন ত্রিভুজের এক শীর্ষ হইতে কতকগুলি সরল রেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে কতকগুলি সমান সমান ভাগে ভাগ কর।

১৬। একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর এক নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর, যাহার এক কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

১৭। একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর এক নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এক আয়তক্ষেত্র রচনা কর।

১৮। একটি আয়তক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট পঞ্চভুজের সমান করিয়া আঁক।

১৯। কোন ত্রিভুজকে উহার এক শীর্ষ দিয়া সরল রেখা টানিয়া 3 : 4 অনুপাতে বিভক্ত করিয়া দেখাও।

২০। কোন চতুর্ভুজকে উহার যে-কোন বাহুস্থিত এক নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া সরল রেখা টানিয়া সমদ্বিখণ্ডিত কর।

২১। কোন সামান্তরিককে উহার যে-কোন এক শীর্ষ দিয়া সরল রেখা টানিয়া (১) ত্রিখণ্ডিত কর, (২) 2 : 3 অনুপাতে দুই ভাগ কর।

২২। দুইটি নির্দিষ্ট সরলরৈখিক ক্ষেত্রের অন্তরফলের সমান এক আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

২৩। দুইটি চতুর্ভুজের অন্তরফলের সমান একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

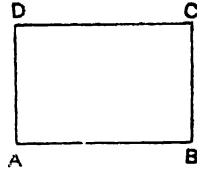
তৃতীয় খণ্ড

তৃতীয় খণ্ড

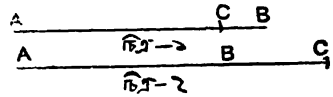
প্রথম অধ্যায়

সংজ্ঞা

১। **আয়তক্ষেত্র**

ABCD আয়তক্ষেত্রটিকে আয়ত AB, AD দ্বারা বুঝান হয়; যেহেতু ইহার সন্নিহিত বাহু দুইটি জানিতে পারিলে আয়তক্ষেত্রটি সম্পর্কে ধারণা হয়। আয়তক্ষেত্রের ফলকে AB. AD বলা হয়। বিপরীত কোণস্থ বিন্দু দুইটি উল্লেখ করিয়াও ক্ষেত্রটিকে বুঝান হয়। যথা, DB ক্ষেত্র বা AC ক্ষেত্র।

একই রূপে ABর উপর বর্গকে AB^2 বলিয়া লেখা হয়।

২। **অন্তর্ভাগ বিন্দু ও বহির্ভাগ বিন্দু**

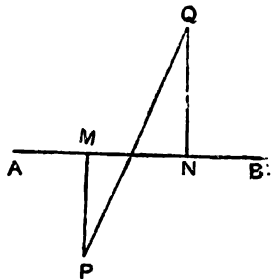
যদি AB সরল রেখার মধ্যে বা বর্ধিত করিয়া C বিন্দুটি লওয়া যায়, তাহা হইলে C বিন্দুটি AB সরল রেখাটিকে দুই **খণ্ডে** বা **অংশে** (Segments) AC, CBতে ভাগ করিয়াছে বলা হয়। উভয় ক্ষেত্রেই C বিন্দু হইতে AB সরল রেখার উভয় পার্শ্বস্থ শেষবিন্দু পর্যন্ত দূরত্বকে খণ্ড বা অংশ বলিয়া লওয়া হয়।

১নং চিত্রে C বিন্দুটিকে **অন্তর্ভাগ বিন্দু** বলা হয় এবং ২নং চিত্রে C বিন্দুটিকে **বহির্ভাগ বিন্দু** বলা হয়।

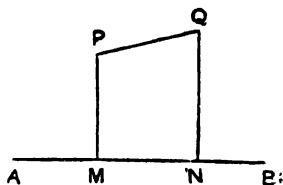
AB সরল রেখাটি C বিন্দুতে ১নং চিত্রে **অন্তর্বিভক্ত** (divided internally) এবং ২নং চিত্রে **বহির্বিভক্ত** (divided externally) হইয়াছে বলা হয়।

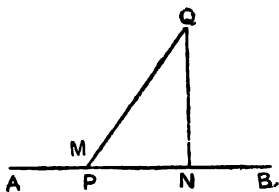
লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে অন্তঃস্থভাবে (internally) ভাগ করিলে সমগ্র রেখাটি অংশ দুইটির যোগফলের সমান ; AB = AC + CB.

এবং বহিঃস্থভাবে (externally) ভাগ করিলে সমগ্র রেখাটি অংশ দুইটির বিয়োগফলের সমান ; AB = AC − CB.

৩। **অভিক্ষেপ**

যদি AB সরল রেখার উপর PQ সরল রেখার উভয় প্রান্ত হইতে PM ও QN দুইটি লম্ব অঙ্কিত করা যায়, তাহা হইলে M ও N এই পাদবিন্দু দুইটির দূরত্বকে **অভিক্ষেপ** (Projection) বলা হয়।

(১নং চিত্র)

পার্শ্বস্থ ১ নং ও ২ নং চিত্রে MN, AB সরল রেখার উপর PQ সরল রেখার অভিক্ষেপ।

(২নং চিত্র)

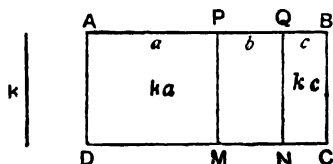
যদি PQ সরল রেখার যে-কোন প্রান্ত, ধরিয়া লও P, AB সরল রেখার উপর লগ্ন থাকে (৩নং চিত্র), তাহা হইলে P হইতে ABর উপর লম্ব PM ঐ বিন্দুতেই মিশিয়া থাকিবে। এ স্থলে PNই ABর উপর PQএর অভিক্ষেপ।

(৩নং চিত্র)

বীজগণিতের সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক উপপাদ্য

৩৩শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ২।১)

দুইটি সরল রেখার মধ্যে একটি কতিপয় অংশে বিভক্ত হইলে, ঐ রেখা দুইটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, অবিভক্ত রেখা ও বিভক্ত রেখার প্রত্যেক অংশের অন্তর্বর্তী আয়তক্ষেত্রগুলির সমষ্টির সমান।

[If there be two straight lines, one of which is divided into any number of parts, the rectangle contained by the two lines is equal to the sum of the rectangles contained by the undivided line and several parts of the divided line.]

অনুরূপ বীজগণিতের সূত্র—$k(a+b+c)=ka+kb+kc$.

AB এবং k নির্দিষ্ট দুইটি সরল রেখা। ধর, ABকে P ও Q বিন্দুতে তিনটি অংশে বিভক্ত করা হইল। মনে কর, AP, PQ ও QB যথাক্রমে a, b ও c একক দীর্ঘ; তাহা হইলে, AB $=(a+b+c)$ একক দীর্ঘ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$\text{আয়ত } k.AB = \text{আয়ত } k.AP + \text{আয়ত } k.PQ + \text{আয়ত } k.QB.$$

অর্থাৎ, $k(a+b+c)=ka+kb+kc.$

অঙ্কন : A বিন্দুতে kর সমান করিয়া AD লম্বটি অঙ্কিত কর। D হইতে ABর সমান্তরাল করিয়া DC অঙ্কিত কর। P, Q, B হইতে ADর সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে PM, QN, BC অঙ্কিত কর। উহারা DCকে যথাক্রমে M, N ও C বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে $AD = PM = QN = BC = k$.

প্রমাণ : ক্ষেত্র AC = ক্ষেত্র AM + ক্ষেত্র PN + ক্ষেত্র QC,

কিন্তু ক্ষেত্র AC = আয়ত AB.AD

= আয়ত AB.k

= $(a+b+c)k$ বর্গ একক ;

এবং, ক্ষেত্র AM = আয়ত AP.AD

= আয়ত AP.$k = ak$ বর্গ একক ;

ক্ষেত্র PN = আয়ত PQ.PM

= আয়ত PQ.$k = bk$ বর্গ একক ;

ক্ষেত্র QC = আয়ত QB.QN

= আয়ত QB.$k - ck$ বর্গ একক।

$\therefore$ আয়ত AB.k = আয়ত AP.k + আয়ত PQ.k

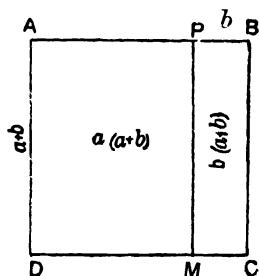
+ আয়ত QB k

অর্থাৎ, $k(a+b+c) = ka + kb + kc$.

৩৪শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ২।২)

একটি সরল রেখাকে দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত করা হইলে সমগ্র রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, সমগ্র রেখা এবং তাহার অংশ দুইটির অন্তর্গত যে দুইটি আয়তক্ষেত্র হয় তাহাদের সমষ্টির সমান।

[If a straight line is divided into two parts, the square on the given line is equal to the sum of the rectangles contained by the whole line and each of the segments.]

অনুরূপ বীজগণিতের সূত্র—$(a+b)^2 = a(a+b) + b(a+b)$.

P বিন্দুতে ABকে AP ও BP এই দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত করা হইয়াছে।

মনে কর AP $=a$ এবং PB $=b$ একক দীর্ঘ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$AB^2 = AP.AB + PB.AB$$

অথবা $(a+b)^2 = a(a+b) + b(a+b)$.

ABর উপর ABCD বর্গটি অঙ্কিত কর।

P বিন্দু হইতে AD বা BCর সমান্তর করিয়া PM লম্বটি অঙ্কিত কর উহা DCতে M বিন্দুতে মিশিল।

প্রমাণ : ক্ষেত্র AC = ক্ষেত্র AM + ক্ষেত্র PC.

ক্ষেত্র AC = আয়ত AB.AD = $AB^2 = (a+b)^2$ বর্গ একক

ক্ষেত্র AM = আয়ত AP.AD

= আয়ত AP.AB = $a(a+b)$ বর্গ একক

ক্ষেত্র PC = আয়ত PB.PM

= আয়ত PB.AB = $a(a+b)$ বর্গ একক

অর্থাৎ, $AB^2 = AP.AB + PB.AB$

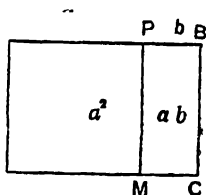
অথবা $(a+b)^2 = a(a+b) + b(a+b)$.

অনু.। উপরের উপপাদ্যের সরল রেখাটিকে যদি দুইটি সমান অংশে অন্তর্বিভক্ত করা হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, উহার অর্ধাংশের উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র সমগ্র রেখাটির উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রটির এক-চতুর্থাংশের সমান হইবে।

৩৫শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ২।৩)

একটি সরল রেখা দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত হইলে, সমগ্র রেখা এবং তাহার একটি অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, উক্ত অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র এবং অংশ দুইটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

[If a straight line is divided internally into two parts, the rectangle contained by the whole line and one of the parts is equal to the sum of the square on that part and the rectangle contained by the two parts.]

অনুরূপ বীজগণিতের সূত্র—$a(a+b)=a^2+ab$.

মনে কর, AB সরল রেখাটি P বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে এবং

AP $=a$ ও PB $=b$ একক দীর্ঘ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$AP.AB=AP^2+AP.PB$$

অথবা, $a(a+b)=a^2+ab$.

অঙ্কন : ABর উপর ABCD আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কন কর যাহাতে AD $=$ BC $=a$ একক দীর্ঘ হয়।

P হইতে AD বা BCর সমান্তর করিয়া PM অঙ্কিত করিয়া উহাকে DCতে M বিন্দুতে মিশাইয়া দাও।

প্রমাণ : এখন AP.AB = AD.AB

= AM ক্ষেত্র + PC ক্ষেত্র

AM ক্ষেত্র = AP.AD = AP^2 = a^2 বর্গ একক

PC ক্ষেত্র = BC.BP = AP.PB = ab বর্গ একক

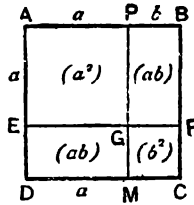
$\therefore$ AP.AB = AP^2 + AP.PB

অথবা, $a(a+b) = a^2 + ab.$

৩৬শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ২।৪)

একটি সরল রেখা অন্তঃস্থভাবে দুই অংশে বিভক্ত হইলে, সমগ্র রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, অংশ দুইটির উপর অঙ্কিত দুইটি বর্গক্ষেত্র এবং অংশ দুইটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

[If a straight line is divided internally into two segments. the square on the whole line is equal to the sum of the squares on the two segments together with twice the rectangle contained by those two segments.]

অনুরূপ বীজগণিতের সূত্র—$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

AB সরল রেখাকে P বিন্দুতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করা হইয়াছে। মনে কর, উহার অংশ দুইটি AP, PB যথাক্রমে a ও b একক দীর্ঘ; তাহা হইলে AB $= a+b$ একক দীর্ঘ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$AB^2 = AP^2 + PB^2 + 2AP.PB$$

অথবা, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$

অঙ্কন: ABর উপর ABCD বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। AD হইতে APর বা aর সমান করিয়া AE কাটিয়া লও। P ও E বিন্দু দিয়া

যথাক্রমে AD ও ABর সমান্তরাল করিয়া PM ও EF অঙ্কিত করিয়া DC ও BCতে যথাক্রমে M ও F বিন্দুতে মিশাইয়া দাও। উহারা পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। তাহা হইলে ED = PB = b.

প্রমাণ : ক্ষেত্র AC = ক্ষেত্র AG + ক্ষেত্র GC + ক্ষেত্র PF + ক্ষেত্র EM ;

এখন, ক্ষেত্র AC = বর্গ AB = $AB^2 = (a+b)^2$ বর্গ একক

ক্ষেত্র AG = বর্গ AP = $AP^2 = a^2$ বর্গ একক

ক্ষেত্র GC = বর্গ PB = $PB^2 = b^2$ বর্গ একক

ক্ষেত্র PF = আয়ত PB.BF

= আয়ত AP.PB = ab বর্গ একক

ক্ষেত্র EM = আয়ত EG.ED

= আয়ত AP.PB = ab বর্গ একক

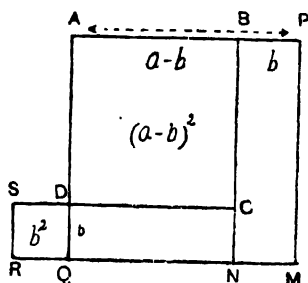
অতএব, $AB^2 = AP^2 + PB^2 + 2AP.PB$

অথবা, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

৩৭শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ২।৭)

একটি সরল রেখাকে বহিঃস্থভাবে দুই অংশে বিভক্ত করিলে উক্ত রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের যোগফল অপেক্ষা অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দুই গুণ পরিমাণ কম হইবে।

[If a straight line is divided externally into two segments, the square on the given line is equal to the sum of the squares on the two segments diminished by twice the rectangle contained by the segments.]

অনুরূপ বীজগণিতের সূত্র—$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$.

AB সরল রেখাকে P বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করা হইয়াছে। মনে কর, AP ও PB যথাক্রমে a ও b একক দীর্ঘ, তাহা হইলে

AB $= a-b$ একক দীর্ঘ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2=AP^2+PB^2-2AP.PB$

অথবা, $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$.

অঙ্কন: APর উপর APMQ বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর। AQ হইতে ABর সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও। B ও D বিন্দু

দুইটি দিয়া যথাক্রমে AQ ও APর সমান্তরাল করিয়া BC, DC অঙ্কিত কর। ইহারা C বিন্দুতে মিলিল। এখন CD ও MQকে S ও R অবধি বর্ধিত কর, যেন $DS = QR = PB = b$ হয়। SR যোগ কর। BCকে বর্ধিত করিয়া QMএ Nএ মিশাইয়া দাও।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুযায়ী $SR = DQ = CN = PB = b$,

$$QN = DC = AB = (a - b)$$

এবং $CS = CD + DS = a$.

একই রূপে, $NR = a$.

এখন, ক্ষেত্র AC = ক্ষেত্র AM + ক্ষেত্র SQ − ক্ষেত্র BM − ক্ষেত্র SN.

কিন্তু, ক্ষেত্র AC = বর্গ AB $= AB^2 = (a - b)^2$ বর্গ একক

এবং ক্ষেত্র AM = বর্গ AP $= AP^2 = a^2$ বর্গ একক

ক্ষেত্র SQ = বর্গ SD = বর্গ PB $= PB^2 = b^2$ বর্গ একক

ক্ষেত্র BM = আয়ত PBNM = PM. PB

= AP. PB $= ab$ বর্গ একক

ক্ষেত্র SN = আয়ত SCNR = SC. SR

= AP. PB $= ab$ বর্গ একক ;

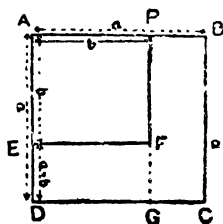
$$\therefore \quad AB^2 = AP^2 + PB^2 - 2AP.PB$$

অথবা, $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

৩৮শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ২।৫, ৬)

দুইটি সরল রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির অন্তরফল উহাদের সমষ্টি এবং অন্তরফলের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

[The difference of the squares on two straight lines is equal to the rectangle contained by their sum and difference.]

অনুরূপ বীজগণিতের সূত্র—$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

AB ও AP নির্দিষ্ট রেখা দুইটির একটিকে এমন ভাবে আর একটির উপর বরাবর স্থাপন কর যাহাতে একটির প্রথম বিন্দু অন্যটির প্রথম বিন্দুর উপর পড়ে। আর ইহারা যথাক্রমে a ও b একক দীর্ঘ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB^2 - AP^2 = (AB+AP)(AB-AP)$$

অথবা $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

অঙ্কন : AB ও APর উপর যথাক্রমে ABCD ও APFE বর্গক্ষেত্র দুইটি অঙ্কিত কর।

PFকে বর্ধিত করিয়া DCতে G বিন্দুতে মিশাইয়া দাও।

তাহা হইলে, $ED = PB = a - b$ একক।

13

প্রমাণ: এখন, $AB^2 - AP^2 =$ AC বর্গক্ষেত্র $-$ AF বর্গক্ষেত্র

$=$ PC আয়তক্ষেত্র $+$ EG আয়তক্ষেত্র

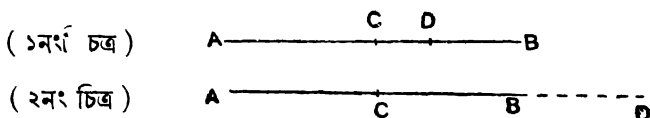
$= BC.PB + EF.ED$

$= AB.PB + AP.PB$

$= PB(AB + AP)$

$= (AB + AP)(AB - AP)$

অর্থাৎ, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

অনু.। যদি কোন সরল রেখা দ্বিখণ্ডিত হয় এবং পুনরায় দুই অংশে বিভক্ত হয়, তাহা হইলে অসমান অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, উক্ত রেখার অর্ধেকের উপর বর্গক্ষেত্র এবং বিভাগ-বিন্দু দুইটির মধ্যস্থিত রেখার বর্গক্ষেত্রের অন্তরফলের সমান।

AB সরল রেখা C বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত ও D বিন্দুতে অসমান দুই খণ্ডে বিভক্ত হইয়াছে। ১নং চিত্রে D বিন্দু ABর মধ্যে এবং ২নং চিত্রে ABর বাহিরে।

১নং চিত্রে, $AD.DB = (AC + CD)(CB - CD)$

$= (AC + CD)(AC - CD)$

(যেহেতু, $AD = CB$)

$= AC^2 - CD^2$

এবং ২নং চিত্রে, $AD.DB = (CD + AC)(CD - CB)$

$= (CD + AC)(CD - AC)$

(যেহেতু, $AC = CB$)

$= CD^2 - AC^2$.

অনুশীলনী (২৩)

১। নিম্নের বীজগণিতীয় অভেদের অনুরূপ জ্যামিতিক উপপাদ্য চিত্রিত ও বিবৃত কর :—

(১) $(2a)^2 = 4a^2$;

(২) $(3a)^2 = 9a^2$;

(৩) $(\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2$.

২। জ্যামিতিক উপায়ে নিম্নের বীজগণিতের সূত্রগুলির প্রমাণ দাও :—

(১) $(a-b)x = ax - bx$;

(২) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$;

(৩) $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$;

(৪) $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$;

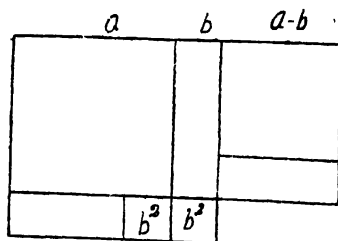
(৫) $(a-b)(a-c) = a^2 - ac + bc - ab$;

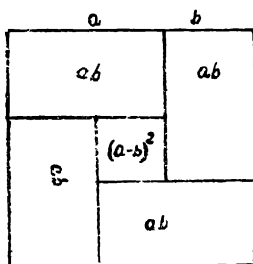
(৬) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

৩। অনুরূপ জ্যামিতিক উপপাদ্য অঙ্কন ও প্রমাণ কর :—

(১) $(a+3)(a+4) = a^2 + 7a + 12$;

(২) $(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$.

৪। চিত্রে অঙ্কনকার্য করিয়া দেওয়া হইল ; প্রমাণ করিয়া দেখাও যে, $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$.

৫। চিত্রে অঙ্কনকার্য করিয়া দেওয়া হইল; প্রমাণ করিয়া দেখাও যে,

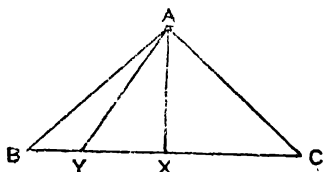
$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$

৬। প্রমাণ কর, যদি দুই অসমান সরল রেখার সমষ্টি নির্দিষ্ট থাকে, তবে রেখাদ্বয়ের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি, নির্দিষ্ট সমষ্টির উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের অর্ধাংশ অপেক্ষা সকল অবস্থায়ই অধিক হইবে।

৭। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ; AY একটি সরল রেখা উহার (১) ভূমি বা (২) ভূমির বর্ধিতাংশ পর্যন্ত টানা হইল; এখন প্রমাণ করিয়া দেখাও যে,

যখন উহা ভূমিকে অন্তর্বিভক্ত করিয়াছে, তখন,

$AY^2=AC^2-BY.YC.$

আর যখন উহা ভূমিকে বহির্বিভক্ত করিয়াছে, তখন

$AY^2=AC^2+BY.YC.$

(**Pappusএর প্রতিজ্ঞা**)

ABC একটি ত্রিভুজ

$AB=AC.$

A হইতে BCর উপর AX একটি লম্ব টান;

এখন $AB^2=AX^2+BX^2$,

এবং $AY^2=AX^2+YX^2$, এইরূপ ভাবে অগ্রসর হও।

৮। যদি AB সরল রেখার উপর, পরপর A, B, C, D চারিটি বিন্দু লওয়া হয়, তবে প্রমাণ কর,

(১) আয়তক্ষেত্র AC.BD = আয়তক্ষেত্র AB.CD + আয়তক্ষেত্র AD.BC ;

(২) $AD^2+BC^2=AC^2+BD^2+2AB.CD$;

(৩) $AC^2+BD^2=AB^2+CD^2+2AD.BC$.

৯। যদি কোন সরল রেখা AB, X বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইয়া থাকে, তবে দেখাও যে, $AB^2=AX^2+XB^2+2AX.XB$.

১০। AB সরল রেখাটি X বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। ইহাকে কোন বিন্দু Y পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল, এখন যদি $AY.YB=8AX^2$ হইয়া থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, AY = 2AB.

১১। দুই সরল রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি ঐ সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ অপেক্ষা কখনই ন্যূন হইবে না।

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ এই সূত্র হইতে এই ফল বাহির কর।

১২। যদি কোন সরল রেখা AB, কোন Y বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইয়া থাকে, এবং X বিন্দু যদি ঐ সরল রেখা ABর মধ্যবিন্দু হয়, তবে প্রমাণ করিয়া দেখাও যে, আয়তক্ষেত্র AY.YBর পরিমাণ, Y বিন্দু যত X বিন্দু হইতে দূরে সরিতে থাকিবে, ততই কমিতে থাকিবে।

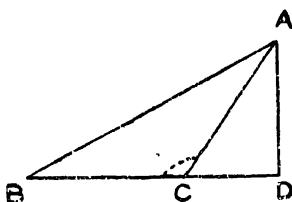
$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ এই সূত্র হইতে এই ফল বাহির কর।

১৩। ষষ্ঠ অনুশীলনী হইতে দেখাও যে, AB যদি Q বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইয়া থাকে, তবে AQ^2+QB^2এর পরিমাণ Q যখন A হইতে B পর্যন্ত যাইতে থাকিবে, তখন কিরূপে কমিতে বাড়িতে থাকিবে।

অভিক্ষেপ সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

৩৯শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ২।১২)

একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূল কোণের বিপরীত বাহুর উপর বর্গ, উহার অপর দুই বাহুর উপর বর্গ দুইটি এবং এক বাহু ও অন্যটির ইহার উপর অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দুই গুণের সমষ্টির সমান।

[In an obtuse-angled triangle, the square on the side opposite the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle together with twice the rectangle contained by one of those sides and the projecton of the other side upon it.]

ABC ত্রিভুজের $\angle C$ একটি স্থূল কোণ।

A বিন্দু হইতে BC বর্ধিত করিয়া AD লম্বটি BCর উপর অঙ্কিত হইল। তাহা হইলে CD, BCর উপর CAর অভিক্ষেপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.CD$.

প্রমাণ : BD, BC ও CDর যোগফলের সমান,

$\therefore BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC.CD.$ (৩৬শ উপঃ)

উভয় পার্শ্বে DA^2 যোগ কর।

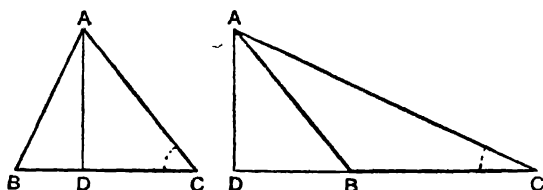
সুতরাং $BD^2 + DA^2 = BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2BC.CD.$

কিন্তু, $BD^2 + DA^2 = AB^2$
এবং $CD^2 + DA^2 = CA^2$ } কারণ, $\angle D$ একটি সমকোণ

$\therefore AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.CD.$

৪০শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ২।১৩)

একটি ত্রিভুজের সূক্ষ্ম কোণের বিপরীত বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র দুইটির, এবং শেষোক্ত বাহু দুইটির একটি ও ইহার উপর অপরটির অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দুই গুণের অন্তরের সমান।

[In any triangle the square on the side opposite the acute angle is equal to the sum of the squares on the other two sides diminished by twice the rectangle contained by one of those two sides and the projection of the other upon it.]

ABC ত্রিভুজের ∠C একটি সূক্ষ্ম কোণ।

A বিন্দু হইতে BCর উপর (বা BC বর্ধিত করিয়া) AD একটি লম্ব অঙ্কিত করা হইল, তাহা হইলে BCর উপর CAর অভিক্ষেপ হইল CD.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.CD.$$

প্রমাণ : উভয় চিত্রেই BD, BC ও CDর বিয়োগফল ;

$\therefore \quad BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.$ (১৩শ উপঃ)

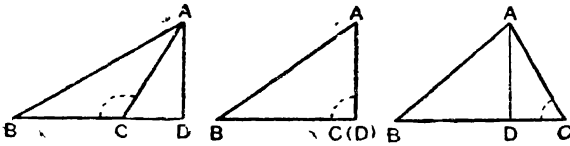
উভয় পার্শ্বে DA^2 যোগ কর।

$\therefore \quad BD^2 + DA^2 = BC^2 + CD^2 + DA^2 - 2BC.CD.$

কিন্তু, $BD^2+DA^2=AB^2$,

এবং $CD^2+DA^2=CA^2$, কারণ, $\angle D$ একটি সমকোণ;

$$\therefore \quad AB^2=BC^2+CA^2-2BC.CD.$$

৩১শ, ৩৯শ, ৪০শ উপপাদ্য সম্পর্কে টীকা

(১) $\angle BCA$ স্থূল কোণ হইলে

$$AB^2=BC^2+CA^2+2BC.CD. \qquad \text{(৩৯শ উপঃ)}$$

(২) $\angle BCA$ সমকোণ হইলে

$$AB^2=BC^2+CA^2. \qquad \text{(৩১শ উপঃ)}$$

(৩) $\angle BCA$ সূক্ষ্ম কোণ হইলে

$$AB^2=BC^2+CA^2-2BC.CD. \qquad \text{(৪০শ উপঃ)}$$

লক্ষ্য করিতে হইবে যে $\angle BCA$ সমকোণ হইলে AD, ACর সহিত মিশিয়া যাইবে, এবং $CD=0$ হইবে; অতএব, $2BC.CD=0$.

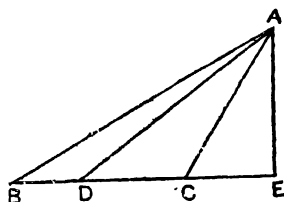
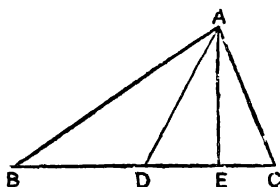
এই তিনটি উপপাদ্য একই নির্বচনে গ্রথিত করা যায় :—

ত্রিভুজের কোন বাহুর উপর বর্গ উহার অপর দুই বাহুর উপর বর্গ দুইটির সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর, তাহাদের সমান বা তাহা হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে, যদি প্রথমোক্ত বাহুর বিপরীত কোণ যথাক্রমে স্থূল কোণ, সমকোণ বা সূক্ষ্ম কোণ হয়; উক্ত বৃহত্ত্বের বা ক্ষুদ্রত্বের পরিমাণ শেষোক্ত দুই বাহুর যে কোন একটির ও অন্যটির উহার উপর অভিক্ষেপের অন্তর্গত যে আয়তক্ষেত্রটি হয় তাহার দুই গুণের সমান হইবে।

এপোলোনিয়াসের উপপাদ্য

৪১শ উপপাদ্য

একটি ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টি, ইহার তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের উপর এবং তৃতীয় বাহুর দ্বিখণ্ডক মধ্যমার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির দুই গুণের সমান।

[The sum of the squares on any two sides of a triangle is equal to twice the square on half the third side together with twice the square on the median which bisects the third side.]

মনে কর ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর AD মধ্যমা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $AB^2+AC^2=2(BD^2+DA^2)$.

প্রমাণঃ A বিন্দু হইতে BC (বা BC বর্ধিত করিয়া) AE লম্বটি অঙ্কিত হইল।

যদি $\angle ADB$ একটি স্থূল কোণ হয়, তাহা হইলে $\angle ADC$ একটি সূক্ষ্ম কোণ ;

স্বতরাং, ABD ত্রিভুজে, $AB^2=BD^2+DA^2+2BD.DE$ (৩৮শ উপঃ)

এবং ADC ত্রিভুজে, $AC^2=CD^2+DA^2-2CD.DE$

$=BD^2+DA^2-2BD.DE$ (৩৯শ উপঃ)

(যেহেতু, CD = BD)

সুতরাং দুইটি ফল যোগ করিয়া

$$AB^2+AC^2=2(BD^2+DA^2).$$

টীকা। এই উপপাদ্যটি ইহার আবিষ্কর্তা গ্রীক্ জ্যামিতিবেত্তা এপোলোনিয়াসের নামানুসারে **এপোলোনিয়াসের উপপাদ্য** (Apollonius' Theorem) বলিয়া পরিচিত।

অনুশীলনী (২৪)

১। সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি, বাহু-চতুষ্টয়ের উপর অঙ্কিত বর্গচতুষ্টয়ের সমষ্টির সমান।

২। চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি, উক্ত ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু-সংযোজক রেখাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির দ্বিগুণ।

৩। চতুর্ভুজের বাহু চারিটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র-চতুষ্টয়ের সমষ্টি, উহার কর্ণদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি এবং কর্ণদ্বয়ের মধ্য-বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের যোগফল হইতে চতুর্গুণ অধিক।

৪। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রত্রয়ের সমষ্টির তিন গুণ লইলে তাহা ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রত্রয়ের সমষ্টির চারি গুণের সমান।

৫। ABCD একটি আয়ত; O উহার অন্তঃস্থ বা বহিঃস্থ যে-কোন এক বিন্দু। প্রমাণ কর, $OA^2+OC^2=OB^2+OD^2$.

৬। ABC একটি ত্রিভুজ; $\angle B$ ও $\angle C$ সূক্ষ্ম কোণ; যদি BE, CF, যথাক্রমে AC, ABর উপর লম্বভাবে টানা হয়, তবে প্রমাণ কর,

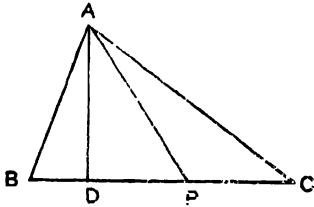
$$BC^2=AB.BF+AC.CE.$$

৭। ABC একটি ত্রিভুজ, G তাহার ভরকেন্দ্র; এখন প্রমাণ কর,

$$GA^2+GB^2+GC^2=\tfrac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

[**সঙ্কেত :** মধ্যমা তিনটি G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; A বিন্দু হইতে যে মধ্যমা যোগ হইয়াছে, তাহার $\frac{2}{3}$ অংশ = GA. এইরূপে অন্যগুলির সমাধান পাইলে, অনুশীলনটি সহজেই প্রমাণিত হয় ।]

৮। ABC একটি ত্রিভুজ ; BC ভূমি যদি P বিন্দুতে এরূপ ভাবে ভাগ হইয়া থাকে যে $m\text{BP} = n\text{CP}$ হয়, তবে প্রমাণ কর,

$$m\text{AB}^2 + n\text{AC}^2 = m\text{BP}^2 + n\text{CP}^2 + (m+n)\text{AP}^2.$$

A হইতে AD, BCর উপর একটি লম্ব টান।

P বিন্দুতে অবস্থিত দুইটি কোণের একটি স্থূল কোণ, অপরটি সূক্ষ্ম কোণ। ধরিয়া লও যে ∠APB একটি সূক্ষ্ম কোণ।

APB ত্রিভুজে বিবেচনা করিলে, ∠APB একটি সূক্ষ্ম কোণ,

$$\therefore \quad \text{AB}^2 = \text{BP}^2 + \text{AP}^2 - 2\text{BP.PD}$$

$$m\text{AB}^2 = m\text{BP}^2 + m\text{AP}^2 - 2m\text{BP.PD} ;$$

APC ত্রিভুজে বিবেচনা করিলে, ∠APC একটি স্থূল কোণ,

$$\therefore \quad \text{AC}^2 = \text{CP}^2 + \text{AP}^2 + 2\text{CP.PD}$$

$$\therefore \quad m\text{AC}^2 = n\text{CP}^2 + n\text{AP}^2 + 2n\text{CP.PD}$$

$$= n\text{CP}^2 + n\text{AP}^2 + 2m\text{BP. PD}$$

$$(\because \quad n\text{CP} = m\text{BP})$$

সুতরাং, যোগ করিলে, আমরা $m\text{AB}^2 + n\text{AC}^2$

$$= n\text{BP}^2 + n\text{CP}^2 + (m+n)\text{AP}^2$$ পাইব।

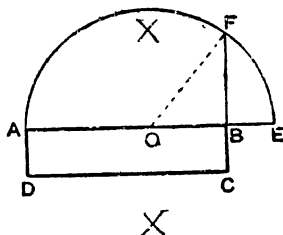
ইহাকে **এপোলোনিয়াসের** (Apollonius) প্রতিজ্ঞা বলে। আমরা স্পষ্টত দেখিতে পাইতেছি এই প্রতিজ্ঞাটি ৪১শ প্রতিজ্ঞার একটি বিশেষ প্রয়োগ মাত্র। (***m* = *n* = *1***).

দ্বিতীয় অধ্যায়

বর্গক্ষেত্র অঙ্কন

২২শ সম্পাদ্য

একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a square equal in area to a given rectangle.]

ABCD একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্র।

অঙ্কন : ABকে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যাহাতে BE = BC হয়।

AEর উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর।

CBকে বর্ধিত করিয়া অর্ধবৃত্তের পরিধির সহিত F বিন্দুতে মিশাইয়া দাও।

এখন BFএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র ABCDর সমান হইবে।

প্রমাণ : FO যোগ কর।

এখন, আয়তক্ষেত্র AC = AB.BC

= AB BE

$=(AO+OB)(OE-OB)$

$=(OF+OB)(OF-OB)$

($\because$ $AO=OE=OF=$ ব্যাসার্ধ)

$=OF^2-OB^2$

$=FB^2$ ($\because$ $\angle FBO$ একটি সমকোণ)

অনু.। একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান করিয়া একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির সমান করিয়া একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। ত্রিভুজটির সমান করিয়া একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর। উপরের সম্পাদ্য অনুসারে আয়তক্ষেত্রের সমান করিয়া একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

বর্গমূল নির্ণয়

উপরোক্ত সম্পাদ্যের অঙ্কন হইতে যে-কোন সংখ্যার বর্গমূল জানিতে পারা যায়।

মনে কর, আমাদের $\sqrt{8}$ জানিতে হইবে।

পূর্ব পৃষ্ঠার চিত্রে $AB=8$ একক এবং BEকে 1 একক ধরা যাউক,

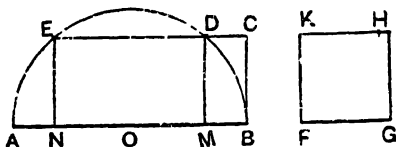
তাহা হইলে $\sqrt{8}=\sqrt{8.1}$

এবং $AE=9$ একক হইল।

অর্থাৎ AFE অর্ধবৃত্তের ব্যাস $=9$ একক, এখন BFএর মাপই $\sqrt{8}$ এর মান।

২৩শ সম্পাদ্য

একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে অন্তঃস্থভাবে এমন দুই অংশে ভাগ করিতে হইবে যে ঐ দুই অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

[To divide a given straight line internally so that the rectangle contained by the segments may be equal to a given square].

AB একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং FGHK নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

অঙ্কন : B বিন্দুতে বর্গক্ষেত্রটির একটি বাহুর সমান করিয়া BC একটি লম্ব অঙ্কিত কর। ABর উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর। C বিন্দু হইতে BAর সমান্তরাল করিয়া CDE সরল রেখাটি অঙ্কিত কর। উহা অর্ধবৃত্তটিকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। D ও E বিন্দু হইতে CBর সমান্তরাল করিয়া ABর উপর দুইটি সরল রেখা অঙ্কিত কর। উহারা ABর M ও N বিন্দুতে মিশিল।

তাহা হইলে AB, M বা N বিন্দুতে উদ্দিষ্ট ভাবে বিভক্ত হইয়াছে।

প্রমাণ : $AM.MB = DM^2$

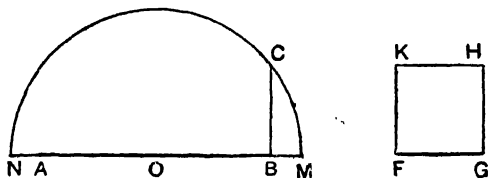
$= BC^2$

$= FG^2$

একই রূপে, $AN.NB = FG^2$.

২৪শ সম্পাদ্য

একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে বহিঃস্থভাবে এমন দুই অংশে ভাগ করিতে হইবে যে ঐ দুই অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

[To divide a given straight line externally so that the rectangle contained by the segments may be equal to a given square.]

AB একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং FGHK একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

অঙ্কন : B বিন্দুতে বর্গক্ষেত্রটির একটি বাহুর সমান করিয়া BC একটি লম্ব অঙ্কিত কর। ABর মধ্যবিন্দু Oকে কেন্দ্র করিয়া এবং OC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর। ABকে উভয় পার্শ্বে বর্ধিত করিয়া M ও N বিন্দুতে অর্ধবৃত্তের সহিত মিশাইয়া দাও।

তাহা হইলে AB, M বা N বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে উদ্দিষ্টরূপে বিভক্ত হইয়াছে।

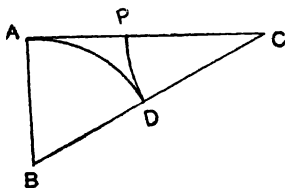
প্রমাণ : $AM.MB = NB.BM$ ($\therefore$ $AM = NB$)

$$= BC^2$$

$$= FG^2$$

২৫শ সম্পাদ্য

একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে অন্তঃস্থভাবে এমন করিয়া দুই অংশে ভাগ করিতে হইবে যে সমগ্র রেখা ও এক অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্য অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

[To divide a given straight line internally into two parts so that the rectangle contained by the whole and one part may be equal to the square on the other part.]

AC একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা। ইহাকে P বিন্দুতে এরূপভাবে ভাগ করিতে হইবে যাহাতে $CA.\ AP = CP^2$.

অঙ্কন : $AB = \frac{1}{2}AC$ করিয়া ACর উপর একটি লম্ব টান। BC যোগ কর।

BC হইতে BAর সমান করিয়া BD কাটিয়া লও ;

আবার, CDর সমান করিয়া CA হইতে CP কাটিয়া লও ;

তাহা হইলে AC উদ্দিষ্টরূপে P বিন্দুতে বিভক্ত হইয়াছে।

প্রমাণ : এখন $AC^2 = BC^2 - AB^2$,

($\because$ $\angle BAC$ এক সমকোণ)

$= (BC + AB)(BC - AB)$

$= (BD + DC + AB)(BC - AB)$

$= (DC + 2AB)CD$

$$=(CP+AC)CP$$

$$(\because\ CD=CP,\ 2AB=AC)$$

$$=CP^2+AC.CP.$$

উভয় পার্শ্ব হইতে CA.CP বাদ দিলে

$$CA^2-CA.CP=CP^2,$$

$$\therefore\quad CA(CA-CP)=CP^2;$$

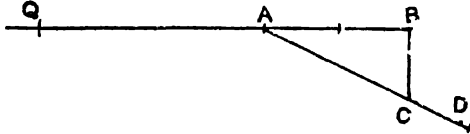
$$\therefore\quad CA.AP=CP^2.$$

সংজ্ঞা। একটি সরল রেখাকে যদি এমন করিয়া কোন বিন্দুতে ভাগ করা যায় যাহাতে সমগ্র রেখা ও এক অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্য অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়, তবে তাহাকে **মাধ্যমিক** বা **মধ্য ছেদ** (medial section) বলে।

অনুশীলনী (২৫)

[বিবিধ]

১। একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে বহিঃস্থভাবে এমন করিয়া দুই অংশে ভাগ করিতে হইবে যে, সমগ্র রেখা ও এক অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্য অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

[To divide a given straight line externally into two parts such that the rectangle contained by the given line and one of the parts may be equal to the square described on the other part.]

$BC=\frac{1}{2}AB$ করিয়া লম্ব টান। AC যোগ করিয়া D পর্যন্ত বর্ধিত কর এবং CD = BC কর।

BAকে B বিন্দুর বিপরীত দিকে বর্ধিত করিয়া AQ = AD করিয়া কাটিয়া লও।

Q, ABকে উদ্দিষ্টরূপে ভাগ করিয়াছে, প্রমাণ কর।

২। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং A উহার শীর্ষবিন্দু; AB ও AC, F ও E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। BE ও CF যদি G বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে,

(১) $\triangle AEF = 3\triangle EFG$,

(২) $\triangle ABC = 12\triangle EFG$.

৩। একটি চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি যুক্ত করিলে যে সামান্তরিকটি উৎপন্ন হয়, তাহা চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

৪। ABC একটি ত্রিভুজ; উহার ∠Bর সমদ্বিখণ্ডক ∠Cর সমদ্বিখণ্ডককে E বিন্দুতে এবং A বিন্দুস্থ বহিঃকোণকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, ADE কোণ ACE কোণের সমান।

৫। ABCD একটি চতুর্ভুজ; ইহার AB ও DC বাহুদ্বয় বর্ধিত করিলে E বিন্দুতে ছেদ করিল, এবং AD ও BC বাহুদ্বয় F বিন্দুতে মিশিল। প্রমাণ কর যে, BCD কোণ A, E ও F বিন্দুস্থ কোণ তিনটির যোগফলের সমান।

৬। একটি চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি দিয়া কর্ণদ্বয়ের সমান্তর করিয়া রেখা টানিলে একটি সামান্তরিক হইবে এবং এই সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

৭। প্রমাণ কর যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজকে দুইটি সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে ভাগ করা যায়।

৮। প্রমাণ কর যে, যে সরল রেখা ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহু দুইটির মধ্যবিন্দু দুইটিকে সংযুক্ত করে, তাহা ট্রাপিজিয়মটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৯। একটি ট্রাপিজিয়মের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তর করিয়া একটি রেখা অঙ্কিত করা হইল। উহাকে অপর দুই বাহু পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া প্রমাণ কর যে, রেখাটি ঐ ছেদবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

১০। সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজ যদি এক সাধারণ ভূমির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত থাকে, তাহা হইলে উহাদের শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখাটি ভূমি দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

১১। একটি ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

১২। ABC ত্রিভুজের মধ্যে O বিন্দুটি বসাও, যাহাতে,

$$\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COA$$

১৩। ABCD এরূপ একটি চতুর্ভুজ, যাহাতে $\triangle ABC = 2\triangle ADC$; AC ও BD যদি O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, $DO = \frac{1}{3}.BD$.

১৪। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ, BCকে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল, যাহাতে $BD.DC = BC^2$. প্রমাণ কর যে,

$$AD^2 = 2AC^2.$$

১৫। ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ; A, B, C বিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর AD, BE, CF লম্ব অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ কর যে,

$$BC^2 + CA^2 + A\,3 = 2(ABAF + BC.BD + CA.CE).$$

১৬। ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু P, এবং R অন্য যে-কোন একটি বিন্দু ; প্রমাণ কর যে,

$$AR^2+BR^2+CR^2+DR^2=4(PA^2+PR^2).$$

১৭। ABC ত্রিভুজের M মধ্যমাগুলির ছেদবিন্দু। প্রমাণ কর,

$$AB^2+BC^2+CA^2=3(AM^2+BM^2+CM^2).$$

১৮। একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটির উপরস্থ বর্গক্ষেত্রগুলির যোগ-সমষ্টির তিন গুণ, উহার মধ্যমা তিনটির উপরস্থ বর্গক্ষেত্রগুলির যোগসমষ্টির চারি গুণের সমান।

১৯। একটি চতুর্ভুজের AB, BC, CA, DA বাহুগুলির E, F, G, H মধ্যবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর,

$$EG^2-FH^2=\frac{1}{2}(AD^2+BC^2-AB^2-CD^2).$$

২০। ABC একটি ত্রিভুজ, M উহার মধ্যমাগুলির ছেদবিন্দু ; P যে-কোন একটি বিন্দু লওয়া হইল। প্রমাণ কর,

$$AP^2+BP^2+CP^2=AM^2+BM^2+CM^2+3MP^2.$$

চতুর্থ খণ্ড

চতুর্থ খণ্ড

প্রথম অধ্যায়

বৃত্ত (Circle)

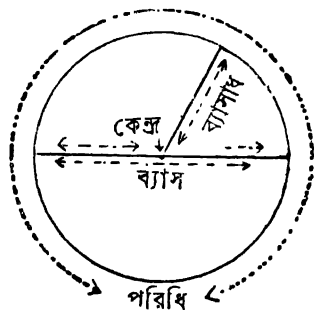
বৃত্ত বিষয়ক নিম্নলিখিত প্রথম কয়টি সংজ্ঞা পূর্বেই বিবৃত হইয়াছে। সেগুলির, ঐ সম্বন্ধীয় আরও কতকগুলি সংজ্ঞার সহিত এখানে পুনরাবৃত্তি করা হইতেছে। একই স্থানে একই বিষয়ক সকল সংজ্ঞা প্রদত্ত হইলে, ছাত্রদের ধারণা স্পষ্ট হইবে।

(১) **বৃত্ত**। যে সমতল ক্ষেত্র একটি বক্র রেখার দ্বারা এরূপে সীমাবদ্ধ হয় যে, উহার মধ্যস্থ কোন এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সীমারেখাস্থ যে-কোন বিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত প্রত্যেক সরল রেখা পরস্পর সমান, তাহাকে **বৃত্ত** (Circle) বলে।

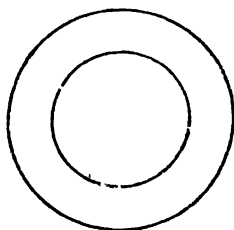
(২) **পরিধি**। যে রেখা দ্বারা বৃত্ত সীমাবদ্ধ হয়, তাহাকে **পরিধি** (Circumference) বলে।

(৩) **কেন্দ্র**। বৃত্তের মধ্যস্থ যে নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে পরিধিস্থ প্রত্যেক বিন্দুর দূরত্ব সমান, তাহাকে ঐ বৃত্তের **কেন্দ্র** (Centre) বলে।

(৪) **ব্যাসার্ধ** বা **অর**। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখার নাম **ব্যাসার্ধ** বা **অর** (Radius). বৃত্তের সংজ্ঞা হইতে বুঝা যায় যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ পরস্পর সমান।

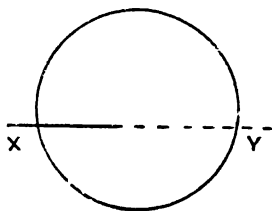
(৫) **ব্যাস**। যে সকল সরল রেখা বৃত্তের কেন্দ্র ভেদ করিয়া উভয় দিকে পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত থাকে, তাহাকে **ব্যাস** (diameter) বলে। সুতরাং ব্যাস অবশ্যই ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ।

পার্শ্বের চিত্রে বৃত্ত বিষয়ক সংজ্ঞা সকল বুঝান হইয়াছে।

(৬) **অর্ধবৃত্ত**। যে-কোন ব্যাস দ্বারাই বৃত্ত সমান দুই অংশে বিভক্ত হয়। প্রত্যেক অংশকে **অর্ধবৃত্ত** (Semi-circle) বলা হয়। পার্শ্বের চিত্রে একটি অর্ধবৃত্ত দেখান হইয়াছে।

(৭) **এককেন্দ্রীয় বৃত্ত**। যে সকল বৃত্তের কেন্দ্র একই, কিন্তু বিভিন্ন ব্যাসার্ধ আছে, তাহাদিগকে **এককেন্দ্রীয় বৃত্ত** (Concentric circles) বলে।

যেমন পার্শ্বের চিত্রে—

দ্রষ্টব্য : প্রকৃত পক্ষে বৃত্ত বলিলে পরিধির দ্বারা বেষ্টিত সমগ্র ক্ষেত্রটিকে বুঝায়। কিন্তু আবার বৃত্ত বলিলে অনেক স্থলে কেবল মাত্র পরিধিকেও বুঝায়। কোন্ অর্থে ব্যবহৃত হইল, তাহা অবশ্য সহজেই বুঝা যাইবে।

(৮) এই সকল সংজ্ঞা হইতে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলি পাওয়া যায় :—

(ক) বৃত্ত একটি সীমাবদ্ধ (closed) ক্ষেত্র। একারণ, যদি কোন সরল রেখা উহার পরিধিকে এক বিন্দুতে ছেদ করে, তবে উহাকে বর্ধিত করিলে উহা আবার ঐ বৃত্তকে কোন এক দ্বিতীয় বিন্দুতে ছেদ করিবে। (পার্শ্বের চিত্র দেখ।)

(খ) সমান সমান ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্ত সকল সর্বসম। উপরিপাত (Superposition) প্রণালী দ্বারা এই সত্য সহজেই প্রমাণিত হয়। ইহাদের যে-কোন একটি অপর একটির উপর এরূপে স্থাপিত হইল যে, একের কেন্দ্র অপরটির কেন্দ্রের উপর পতিত হইল, এ অবস্থায় ইহাদের পরিধিদ্বয় পরস্পর মিলিয়া যাইবে।

(গ) যদি বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন বিন্দুর দূরত্ব ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, সমান, অথবা বৃহত্তর হয়, তবে ঐ বিন্দুটি যথাক্রমে বৃত্তের ভিতরে, পরিধির উপর, বা বাহিরে অবস্থিত থাকিবে।

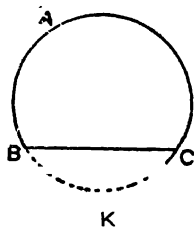
(ঘ) দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ অসমান হইলে উহারা পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না। কারণ এ অবস্থায় ক্ষুদ্রতর ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তটি বৃহত্তর ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তটির সম্পূর্ণ ভিতরে থাকিবে।

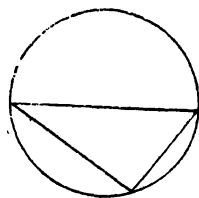
(ঙ) দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র যদি একই হয়, এবং উহাদের পরিধির যদি একটি সাধারণ বিন্দু থাকে, তবে উহারা পরস্পর সম্পূর্ণরূপে না মিলিয়া পারে না।

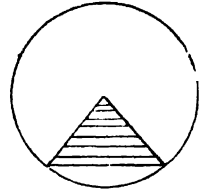
(চ) কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ দেওয়া থাকিলে বৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে নিরূপিত হইবে।

(৯) **চাপ**। পরিধির যে-কোন অংশকে বৃত্তের **চাপ** (Arc) বলে।

(১০) **জ্যা**। বৃত্তের পরিধিস্থ যে-কোন দুই বিন্দুর যোজক সরল রেখাকে উহার **জ্যা** (Chord) বলে। ব্যাস একটি কেন্দ্রগামী জ্যা।

ব্যাস ভিন্ন অন্য জ্যা দ্বারা বৃত্তের পরিধি দুইটি অসমান অংশে বিভক্ত হয়। বড় চাপটিকে **অধিচাপ** (Major Arc) এবং ছোট চাপটিকে **উপচাপ** (Minor Arc) বলা হয়। পার্শ্বের চিত্রের BC একটি জ্যা, BAC অধিচাপ ও BKC উপচাপ। এই অসমান চাপ-দিগকে পরস্পর **অনুবন্ধী** (Conjugate) বলে।

(১১) **বৃত্তাংশ**। যে-কোন জ্যা বৃত্তটিকে দুই অংশে বিভক্ত করে। প্রতি অংশকে **বৃত্তাংশ** (Segment of a circle) বলে। সুতরাং বৃত্তাংশ জ্যা ও চাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র। উপরের চিত্রে ABC, BKC দুইটি বৃত্তাংশ।

(১২) **বৃত্তাংশস্থিত কোণ**। বৃত্তাংশের চাপের কোন বিন্দু হইতে উহার জ্যার প্রান্তবিন্দুদ্বয় পর্যন্ত দুইটি সরল রেখা টানিলে ঐ বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাকে **বৃত্তাংশস্থিত কোণ** (Angle in a segment) বলা হয়। (পার্শ্বস্থ চিত্রের কোণটি দেখ।)

(১৩) **সদৃশ বৃত্তাংশ**। যে সকল বৃত্তাংশে অবস্থিত কোণগুলি সমান, তাহাকে **সদৃশ বৃত্তাংশ** (Similar segments) বলা হয়।

(১৪) **বৃত্তকলা**। বৃত্তের দুইটি অর এবং ঐ দুইটি অরের চাপ দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে **বৃত্তকলা** (Sector) বলে।

সুতরাং অর্ধবৃত্তও একটি বৃত্তকলা।

পার্শ্বের চিত্রে দাগযুক্ত স্থানটি বৃত্তকলা।

(১৫) **এক পরিধিস্থ বিন্দু**। কতকগুলি বিন্দু দিয়া যদি একটি বৃত্ত অঙ্কন করা সম্ভব হয়, তবে ঐ সকল বিন্দুকে **এক পরিধিস্থ** বা **সমবৃত্ত** (Concyclic) **বিন্দু** বলা হয়।

(১৬) **বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ**। যে চতুর্ভুজের শীর্ষসমূহ একই বৃত্তের পরিধিতে অবস্থিত থাকে, তাহাকে **বৃত্তস্থ** বা **বৃত্তে অন্তর্লিখিত** (Cyclic) **চতুর্ভুজ** বলা হয়।

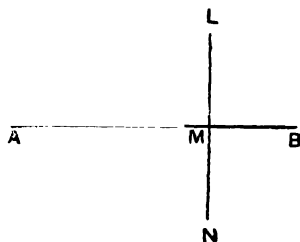
প্রতিসাম্য (Symmetry)

কোন চিত্রকে একটি সরল রেখা-ক্রমে ভাজ করিলে ঐ রেখার উভয় পার্শ্বস্থ চিত্রাংশ দুইটির একটি যদি অপরটির সহিত সর্বাংশে মিলিয়া যায়, তবে ঐ চিত্রটিকে ঐ রেখার উভয় পার্শ্বে **প্রতিসম** (Symmetrical) বলা হয় এবং ঐ রেখাটিকে **প্রতিসাম্য অক্ষ** (Axis of symmetry) বলা হয়।

চিত্রটিকে ভাজ করিলে উভয় পার্শ্বের যে সকল দুই বিন্দু পরস্পর মিলিয়া যায়, তাহাদিগকে **অনুরূপ** (Corresponding) **বিন্দু** বলে।

এইরূপ প্রতিসম চিত্রের এক পার্শ্বস্থ অংশকে অপর পার্শ্বস্থ অংশের **প্রতিবিম্ব** (Image or Reflection) বলা হয়।

মনে কর L কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে AB সরল রেখার উপর LM লম্ব টানা হইল। এবং LMকে বর্ধিত করিয়া LM = MN করা হইল।

এখন AB সরল রেখার বরাবর ক্ষেত্রটি ভাজ করিলে L বিন্দু, N বিন্দু পরস্পর মিলিয়া যাইবে। কারণ, LM = MN এবং ∠LMB = ∠NMB.

এইরূপে দেখান যায় যে, AB সরল রেখার এক পার্শ্বের প্রত্যেক বিন্দু ঐ রেখার অপর পার্শ্বের অনুরূপ বিন্দুর সহিত মিলিত হয়।

সুতরাং AB সরল রেখা এ চিত্রের প্রতিসাম্যাক্ষ।

L বিন্দু N বিন্দুর প্রতিবিম্ব।

এইরূপে প্রমাণ করা যায়—

(১) কোন বর্গক্ষেত্র বা রম্বস্ উহার যে-কোন কর্ণরেখার উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

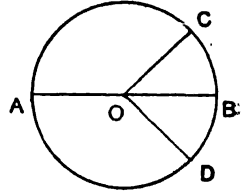
(২) কোন বর্গক্ষেত্র তাহার বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরল রেখার উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

(৩) কোন সমদ্বিবাহু বা সমবাহু ত্রিভুজ উহার শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

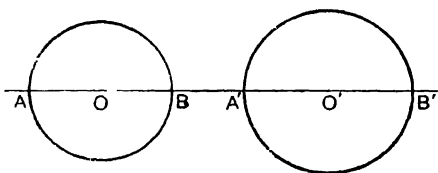
বৃত্ত বিষয়ক প্রতিসাম্য

১। বৃত্ত ব্যাসের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

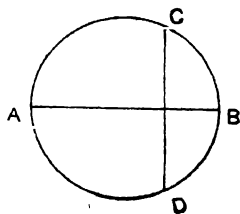
মনে কর, ACD বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB একটি ব্যাস।

ABর বিপরীত দিকে OC, OD এরূপ দুইটি ব্যাসার্ধ টান যেন, ∠COB= ∠DOB হয়। এখন AB ব্যাস বরাবর বৃত্তটিকে ভাজ করিলে, OC, ODর উপর পড়িবে ; কারণ, ∠COB = ∠BOD. আবার যেহেতু, OC = OD, সুতরাং C বিন্দু, D বিন্দু মিলিয়া যাইবে। এইরূপে দেখান যায় যে, ACB চাপের প্রত্যেক বিন্দু ADB চাপের অনুরূপ বিন্দুর সহিত অবশ্যই মিলিয়া যাইবে।

সুতরাং বৃত্তটি ব্যাস ABর উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

দ্রষ্টব্য ১ঃ কোন বৃত্ত C বিন্দু দিয়া গেলে এবং AB উহার এক ব্যাস হইলে, বৃত্তটি AB হইতে Cর সমদূরবর্তী অন্য একটি অনুরূপ বিন্দু D দিয়া অবশ্যই যাইবে।

দ্রষ্টব্য ২ : দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়-সংযোজক সরল রেখা উহাদিগকে প্রতিসমরূপে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। নিম্নের চিত্রে AB, A′B′ দুইটি ব্যাস।

ব্যাসকে বৃত্তের প্রতিসাম্য অক্ষ মনে করিলে বৃত্ত সম্বন্ধীয় বহু প্রতিজ্ঞা সহজে সমাধান করা যায়।

যেমন, বৃত্তের ব্যাসের যে-কোন লম্ব-জ্যা, ব্যাসটি দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়। বৃত্ত যে ব্যাসের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম, তাহা এই প্রতিজ্ঞাটি হইতে সহজেই প্রমাণিত হইবে।

পার্শ্বস্থ চিত্রটি দেখিলেই প্রতিজ্ঞাটির সিদ্ধান্ত ঠিক করিতে পারা যায়।

দ্বিতীয় অধ্যায়

বৃত্তের জ্যা সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

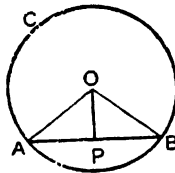
৪২শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।৩)

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত কোন সরল রেখা যদি ব্যাস ভিন্ন অন্য কোন জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে ঐ সরল রেখা ঐ জ্যার উপর লম্ব হয়।

বিপরীতক্রমে

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে ঐ সরল রেখা যদি ঐ জ্যার উপর লম্ব হয়, তবে তাহা ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[A straight line drawn from the centre of a circle to bisect a chord, which is not a diameter, is at right angles to the chord.

Conversely, the perpendicular to a chord from the centre bisects the chord.]

মনে কর ABC একটি বৃত্ত, O উহার কেন্দ্র, এবং AB ব্যাস ভিন্ন অন্য কোন জ্যা ;

(১) মনে কর, OP, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OP, ABর উপর লম্ব।

OA, OB যোগ কর।

প্রমাণ : এখন $\triangle AOP$ ও $\triangle BOP$র মধ্যে

যেহেতু { $OA = OB$ (কারণ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ).
$AP = BP$ (কল্পনা)
এবং OP সাধারণ বাহু ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

∴ $\angle OPA = \angle OPB$

এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ।

∴ OP, ABর উপর লম্ব।

বিপরীতক্রমে

মনে কর, OP, ABর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে OP, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

OA, OB যোগ কর।

প্রমাণ : এখন $\triangle AOP$ ও $\triangle BOP$ দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ ;
(কল্পনা).

উহাদের মধ্যে { $\angle APO = \angle BPO$,
অতিভুজ OA = অতিভুজ OB,
OP সাধারণ বাহু ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

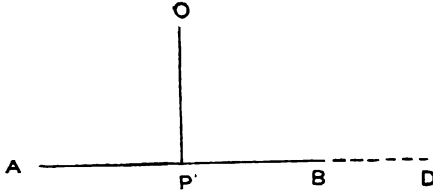
∴ $AP = BP$

অর্থাৎ OP, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অনুসিদ্ধান্ত

১। কোন বৃত্তের কোন জ্যা পুরাপুরি বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত থাকে।

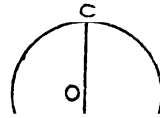
২। কোন সরল রেখা কোন বৃত্তকে দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

মনে কর O কোন বৃত্তের কেন্দ্র, এবং AB সরল রেখা উক্ত বৃত্তকে A ও B দুই বিন্দুতে ছেদ করিল।

O হইতে OP, ABর উপর লম্ব টান।

$\therefore$ AP = BP.

এখন যদি AB সরল রেখা বৃত্তটিকে কোন তৃতীয় বিন্দু Dতে ছেদ করিতে পারে, তবে AP = DP ; সুতরাং BP = DP ; কিন্তু ইহা

৩। কোন সরল রেখা কোন জ্যাকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে উহা কেন্দ্রগামী হয়।

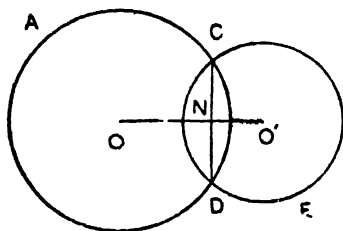
মনে কর O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র ; AB উহার একটি জ্যা এবং CP, ABকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, PC, O বিন্দুর মধ্য দিয়া গমন করে।

প্রমাণ : CP, ABকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে, সুতরাং CPর মধ্যে যে-কোনও বিন্দু A ও B হইতে সমদূরে অবস্থিত ; আবার, বৃত্তটির কেন্দ্র O, A ও B হইতে সমদূরে অবস্থিত।

$\therefore$ O, CPর উপর অবস্থিত কোন বিন্দু।

অর্থাৎ, CP, ABC বৃত্তের কেন্দ্র Oর মধ্য দিয়া গমন করে।

৪৩শ উপপাদ্য

যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করে, তবে বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের যোজক রেখা উহাদের সাধারণ জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[If two circles intersect, the line joining their centres bisects the line joining their points of intersection at right angles.]

মনে কর O, ACD বৃত্তের এবং O′, ECD বৃত্তের কেন্দ্র। বৃত্তদ্বয় C ও D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। তাহা হইলে CD উহাদের সাধারণ জ্যা।

মনে কর N, CDর মধ্যবিন্দু ; ON, O′N যোগ কর।

প্রমাণ : যেহেতু, ACD বৃত্তে O কেন্দ্র এবং N, CD জ্যার মধ্যবিন্দু,

∴ ON, CDর উপর লম্ব।

এইরূপে O′N, CDর উপর লম্ব।

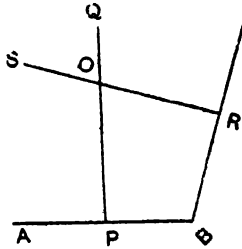
∴ ∠CNO+∠CNO′=দুই সমকোণ।

∴ ON, O′N একই সরল রেখা।

∴ OO′ সরল রেখা CDকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

৪৪শ উপপাদ্য

একই সরল রেখায় অবস্থিত নয়, এরূপ তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

[There is one circle, and only one, which passes through three given points not in a straight line.]

মনে কর, A, B, C বিন্দু তিনটি এক সরল রেখায় অবস্থিত নহে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B ও C বিন্দু দিয়া একটি ও কেবলমাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কন করা যায়।

AB, BC যোগ কর।

ধর PQ, ABকে এবং RS, BCকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিল। এখন, AB, BC একই সরল রেখায় অবস্থিত নহে ; সুতরাং PQ, RS সমান্তরাল নহে ; অতএব তাহারা পরস্পর ছেদ করিবে। মনে কর, তাহারা O বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : যেহেতু, PQ, ABকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে,

∴ PQএর প্রত্যেক বিন্দু, A ও B হইতে সমদূরে অবস্থিত।

আবার একই কারণে RSএর প্রত্যেক বিন্দু, B ও C হইতে সমদূরে অবস্থিত।

অতএব, PQ ও RSএর ছেদবিন্দু O, উহাদের একমাত্র সাধারণ বিন্দু, যাহা A, B, C হইতে সমদূরে অবস্থিত। সুতরাং O কেন্দ্র এবং OA ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তাহা A, B ও C বিন্দু দিয়া যাইবে।

যেহেতু, PQ, RS সরল রেখাদ্বয় অন্য আর এক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না, সেই হেতু, O ব্যতীত অন্য কোন বিন্দু A, B ও C হইতে সমদূরে অবস্থিত হইতে পারে না।

∴ A, B, C দিয়া যায়, এরূপ অপর কোন বৃত্ত থাকিতে পারে না।

অনু. ১। দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে মাত্র দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে। [One circle can cut another at two points only. *Euc.* 3.10.]

কারণ, তাহা না হইলে বৃত্ত দুইটির তিনটি সাধারণ বিন্দু হইবে, এবং তাহা হইলে উহারা একই বৃত্ত হইবে।

অনু. ২। বৃত্তের উপরিস্থিত তিনটি বিন্দু নির্দিষ্ট থাকিলে, বৃত্তটি নির্দিষ্ট হইবে। কারণ, এ অবস্থায় তাহাদের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য বাহির করা যায়।

অনুশীলনী (২৬)

১। *কোন সরল রেখা দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে ছেদ করিলে দুই* পরিধির মধ্যস্থিত উহার দুই অংশ সমান হইবে।

২। কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যার মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরল রেখা বৃত্তের কেন্দ্রগামী হইবে। ঐ সরল রেখা উভয় জ্যার উপর লম্ব হইবে।

৩। বৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-শ্রেণীর মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪। একই বৃত্তের দুইটি জ্যা যদি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে উহারা প্রত্যেকে ঐ বৃত্তের একটি ব্যাস।

৫। দুইটি বৃত্ত এক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে, উহারা অপর এক বিন্দুতেও ছেদ করে, এবং ঐ দুই বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়-সংযোজক সরল রেখা উহাদের সাধারণ জ্যার উপর লম্ব দ্বিখণ্ডক হইবে। (প্রতিসাম্যের দ্বারা প্রমাণ কর)।

৬। যদি কতকগুলি বৃত্ত একই বিন্দুর মধ্য দিয়া গমন করে এবং উহাদের কেন্দ্র সকল এক নির্দিষ্ট সরল রেখায় অবস্থিত হয়, তাহা হইলে ঐ বৃত্ত সকল অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অবশ্যই যাইবে।

৭। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্তগুলির কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[উহা উক্ত বিন্দুদ্বয়-সংযোজক সরল রেখার লম্ব দ্বিখণ্ডক]

৮। এরূপ এক বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা দুই নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় এবং যাহার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরল রেখায় অবস্থিত আছে। এরূপ অঙ্কন কখন অসম্ভব ?

৯। একটি নির্দিষ্ট ব্যাস লইয়া এরূপ এক বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা অপর দুই নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়। কখন এরূপ অঙ্কন সম্ভব হইবে না ?

১০। কোন বৃত্তের অন্তর্গত কোন বিন্দু হইতে যদি পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত করিয়া দুইএর অধিক পরস্পর সমান সরল রেখা টানা সম্ভব হয়, তবে ঐ বিন্দুটিই বৃত্তের কেন্দ্র।

[If more than two equal straight lines can be drawn from a point within a circle to the circumference, that point is the centre. *Euc*. 3.9.]

[মনে কর O ঐ বৃত্তের অন্তর্গত এক বিন্দু এবং A, B ও C পরিধিস্থ তিনটি বিন্দু এরূপ ভাবে অবস্থিত যে, $OA=OB=OC$. এখন Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা A, B ও C বিন্দুগামী হইবে। সুতরাং ইহা প্রদত্ত বৃত্তটির সহিত মিলিয়া যায় এবং O উহার কেন্দ্র হয়।]

১১। প্রমাণ করিয়া দেখাও যে কোন বৃত্তের দুই কেন্দ্র হইতে পারে না।

১২। একটি বৃত্ত দেওয়া আছে; কিরূপে ইহার কেন্দ্র নির্ণয় করিবে ?

১৩। ত্রিভুজের চতুর্দিকে এক বৃত্ত পরিলিখিত কর।

১৪। যদি কোন সামান্তরিক কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত করা যায়, তবে ঐ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হইবে।

৪৫শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।১৪)

বৃত্তের সমান সমান জ্যা সকল কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী ।

বিপরীতক্রমে

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যা সকল সমান ।

[Equal chords of a circle are equidistant from the centre.

Conversely, chords which are equidistant from the centre are equal.]

মনে কর AB ও CD একটি বৃত্তের তুইটি জ্যা ; এবং O ঐ বৃত্তের কেন্দ্র ।

O কেন্দ্র হইতে AB ও CDর উপর যথাক্রমে OF ও OE লম্ব টান ।

তাহা হইলে, OF ও OE যথাক্রমে AB ও CD হইতে Oর দূরত্ব ।

যদি AB = CD হয়, তবে প্রমাণ করিতে হইবে যে

OF = OE.

OB, OD যোগ কর ।

প্রমাণ : যেহেতু OF, ABর উপর লম্ব,

$\therefore$ AF = FB

অর্থাৎ FB = $\frac{1}{2}$AB.

সেইরূপে, ED = $\frac{1}{2}$CD,

কিন্তু AB = CD (কল্পনা) ;

$\therefore$ FB = ED (সমান সমান বস্তুর অর্ধেক বলিয়া)

এখন OFB, OED এই দুই সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যে

অতিভুজ OB = অতিভুজ OD (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

FB = ED (প্রমাণিত)

এবং ∠OFB = ∠OED ;

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম ;

$\therefore$ OF = OE.

বিপরীতক্রমে

যদি OF = OE হয়,

তবে প্রমাণ করিতে হইবে যে AB = CD.

OB, OD যোগ কর।

প্রমাণ : OFB ও OED সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

অতিভুজ OB = অতিভুজ OD,

OF = OE

এবং ∠OFB = ∠OED ;

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম ;

$\therefore$ FB = ED.

পূর্বের ন্যায় প্রমাণ করা যায় FB = $\frac{1}{2}$AB এবং ED = $\frac{1}{2}$CD

সমান সমান বস্তুর দ্বিগুণ সমান ;

$\therefore$ AB = CD.

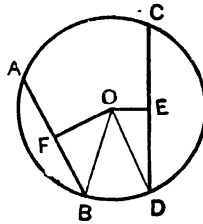
৪৬শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।১৫)

কোন বৃত্তের দুইটি জ্যার মধ্যে কেন্দ্রের নিকটতর জ্যাটি অপেক্ষাকৃত দূরবর্তী জ্যা হইতে বৃহত্তর।

বিপরীতক্রমে

কোন বৃত্তের দুইটি জ্যার মধ্যে যেটি বৃহত্তর সেইটি ক্ষুদ্রতরটি অপেক্ষা কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্তী।

[Of any two chords of a circle, that which is nearer to the centre is greater than one more remote.

Conversely, the greater of the two chords is nearer to the centre than the less.]

মনে কর AB ও CD একটি বৃত্তের দুইটি জ্যা ; এবং O ঐ বৃত্তের কেন্দ্র।

O কেন্দ্র হইতে AB ও CDর উপর যথাক্রমে OF ও OE লম্ব টান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

OF < OE হইলে, AB > CD.

OB, OD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ : যেহেতু, OF, ABর উপর লম্ব ;

$\therefore \quad AF = FB$;

অর্থাৎ $FB = \frac{1}{2}AB$.

সেইরূপে $ED = \frac{1}{2}CD$.

এখন, $OB = OD$,

$\therefore \quad OB^2 = OD^2$;

$\angle OFB$ একটি সমকোণ বলিয়া

$OB^2 = OF^2 + FB^2$

এইরূপে $OD^2 = OE^2 + ED^2$;

$\therefore \quad OF^2 + FB^2 = OE^2 + ED^2$;

কিন্তু $\quad OF < OE$,

$\therefore \quad OF^2 < OE^2$.

$\therefore FB^2 > ED^2$;

$\therefore \quad FB > ED$;

$\therefore$ উভয়ের দ্বিগুণ, $AB > CD$.

বিপরীতক্রমে

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$AB > CD$ হইলে

$OF < OE$.

OB, OD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ : পূর্বের ন্যায় প্রমাণ করা যায় যে

$FB = \frac{1}{2}AB$ এবং $ED = \frac{1}{2}CD$

কিন্তু $AB > CD$; $\quad \therefore \quad FB > ED$

আবার, $OF^2 + FB^2 = OE^2 + ED^2$

কিন্তু $\quad FB^2 > ED^2$ ($FB > ED$ বলিয়া)

$\therefore \quad OF^2 < OE^2$

$\therefore \quad OF < OE$.

অনু.। ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

অনুশীলনী (২৭)

১। বৃত্তের সমান সমান জ্যা সকলের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[উহা ঐ বৃত্তের সহিত একটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত হইবে]

২। দুইটি জ্যা পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে এবং উহারা ছেদবিন্দু ও কেন্দ্র-সংযোজক সরল রেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। প্রমাণ কর জ্যা দুইটি পরস্পর সমান।

৩। কোন বৃত্তের পরস্পর সমান দুইটি জ্যা কোন বিন্দুতে ছেদ করিলে একের দুইটি অংশ যথাক্রমে অন্যের অনুরূপ দুইটি অংশের সমান হইবে।

৪। AB এবং AC একটি বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা ; প্রমাণ কর যে, ∠BACর সমদ্বিখণ্ডক সরল রেখা বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যায়।

৫। বৃত্তের মধ্যে একই বিন্দু দিয়া দুইটি মাত্র সমান জ্যা টানা যায়।

৬। কোন বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন একটি জ্যা অঙ্কিত কর, যাহা ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৭। কোন বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন দুইটি জ্যা অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহারা পরস্পর (১) সমান ও (২) লম্ব হইবে।

৮। দুইটি বৃত্ত যদি পরস্পর ছেদ করে, তবে ছেদবিন্দু হইতে উহাদের পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত যে-কোন দুইটি সমান্তরাল সরল রেখা পরস্পর সমান হয়।

৯। দুইটি বৃত্তের যে-কোন একটি ছেদবিন্দু দিয়া উভয়ের পরিধি পর্যন্ত যে সরল রেখাগুলি টানা যায়, তাহাদের মধ্যে যেটি কেন্দ্রদ্বয়-সংযোজক রেখার সমান্তরাল, সেইটিই বৃহত্তম।

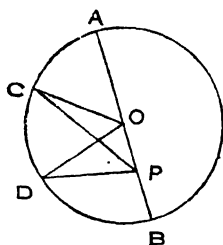
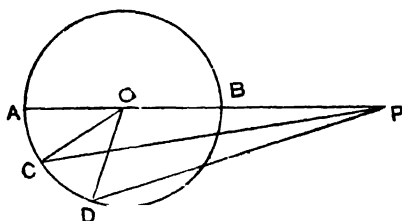
১০। যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ না করে, তাহা হইলে (১) সর্বাপেক্ষা বৃহৎ, (২) সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র, এমন দুই সরল রেখা নির্ণয় কর, যাহাদের প্রান্তদ্বয় বৃত্তদ্বয়ের উপর অবস্থিত থাকে।

১১। সমান সমান জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

১২। বৃত্তের কেন্দ্র ব্যতীত অন্তঃস্থ বা বহিঃস্থ যে-কোন বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত কতকগুলি সরল রেখা টানা হইল; প্রমাণ কর যে ঐ রেখাগুলির মধ্যে

(১) যেটি কেন্দ্রগামী সেটি বৃহত্তম,

(২) যেটি বর্ধিত করিলে কেন্দ্রগামী হয় সেটি ক্ষুদ্রতম

এবং (৩) ঐরূপ দুইটি সরল রেখার মধ্যে যেটি কেন্দ্রে বৃহত্তর কোণ উৎপন্ন করে, সেইটি অপরটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

(১নং চিত্র) (২নং চিত্র)

মনে কর, ACDB বৃত্তের P কোন অন্তঃস্থ বিন্দু (যেমন ১নং চিত্রে) অথবা P কোন বহিঃস্থ বিন্দু (যেমন ২নং চিত্রে)। মনে কর, O উহার কেন্দ্র। PA, PB, PC, PD, পরিধি পর্যন্ত টান যেন PA, O কেন্দ্রগামী হয়। PB ঐ ব্যাসের অবশিষ্ট অংশ। এবং ধর যেন, $\angle POC > \angle POD$.

তাহা হইলে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) PA বৃহত্তম,

(২) PB ক্ষুদ্রতম

এবং (৩) $PC > PD$.

প্রমাণ : (১) POC ত্রিভুজে,

$PO+OC>PC$

কিন্তু $OC=OA$ (ব্যাসার্ধ বলিয়া)

$\therefore PO+OA>PC$

অর্থাৎ $PA>PC$.

সেইরূপে $PA>$ যে-কোন সরল রেখা যাহা P হইতে পরিধিতে টানা যায়।

অর্থাৎ PA বৃহত্তম।

(২) OPD ত্রিভুজে (১নং চিত্রে) $OP+PD>OD$;

$\therefore OP+PD>OB$, অর্থাৎ $PD>PB$.

সেইরূপে P হইতে পরিধি পর্যন্ত যে-কোন সরল রেখা PB হইতে বড়।

(২নং চিত্রে) $PD+OD>OP$;

$\therefore PD+OB>OP$ অর্থাৎ $>OB+PB$;

সুতরাং, $PD>PB$

$\therefore$ উভয় চিত্রেই PB ক্ষুদ্রতম।

(৩) POC, POD ত্রিভুজদ্বয়ে

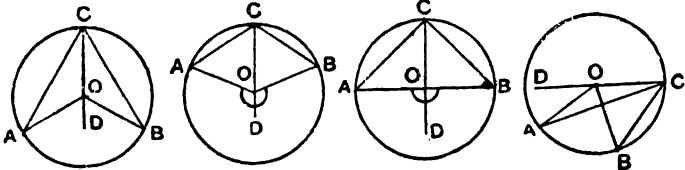
যেহেতু { $OC=OD$,
OP সাধারণ বাহু
এবং $\angle POC>\angle POD$ }

$\therefore PC>PD$.

বৃত্তের কোণ সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

৪৭শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।২০)

কোন বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।

[The angle at the centre of a circle is double of an angle at the circumference, standing on the same arc.]

(১নং চিত্র)   (২নং চিত্র)   (৩নং চিত্র)   (৪নং চিত্র)

মনে কর, AB, একটি বৃত্তের চাপ ; O, ঐ বৃত্তের কেন্দ্র। মনে কর, কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ ও পরিধিস্থ $\angle ACB$, উভয়েই AB চাপের উপর দণ্ডায়মান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle AOB$, $\angle ACB$র দ্বিগুণ।

CO সংযুক্ত করিয়া উহাকে D অবধি বর্ধিত কর।

প্রমাণ : OAC ত্রিভুজের মধ্যে

$OC = OA$ (এক বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া);

$\therefore \angle OAC = \angle OCA$;

$\therefore \angle OAC + \angle OCA = 2\angle OCA$

কিন্তু বহিঃস্থ $\angle AOD = \angle OAC + \angle OCA$;

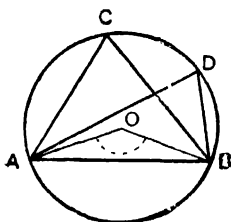
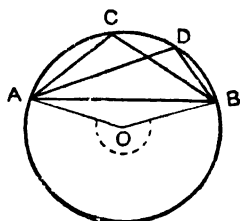
$\therefore \angle AOD = 2\angle OCA$;

এইরূপে $\angle BOD = 2\angle OCB$.

এখন ১নং, ২নং ও ৩নং চিত্রে ইহাদের যোগফল এবং ৪নং চিত্রে ইহাদের বিয়োগফল লইলে, প্রত্যেক স্থলেই $\angle AOB = 2\angle ACB$.

৪৮শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ৩।২১)

কোন বৃত্তের একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

[Angles in the same segment of a circle are equal.]

১. চিত্র

২. চিত্র

মনে কর, ∠ACB ও ∠ADB, একই ACDB বৃত্তাংশস্থ যে-কোন দুইটি কোণ এবং O, ঐ বৃত্তের কেন্দ্র।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ∠ACB = ∠ADB.

AO, BO যোগ কর।

প্রমাণ : কেন্দ্রস্থ ∠AOB ও পরিধিস্থ ∠ACB একই চাপ ABর উপর অবস্থিত।

$$\therefore \quad \angle AOB = 2\angle ACB.$$

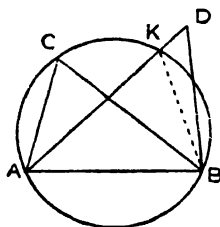
ঐ একই কারণে ∠AOB = 2∠ADB ;

$$\therefore \quad \angle ACB = \angle ADB.$$

টীকা। বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে ∠AOB একটি প্রবৃদ্ধ কোণ হয়।

৪৯শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।২১)

যদি দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরল রেখা উহার একই পার্শ্বস্থ অপর দুই বিন্দুতে সমান সমান সম্মুখ-কোণ উৎপন্ন করে, তবে ঐ বিন্দু চারিটি সমবৃত্ত হইবে।

[If a straight line joining two points subtends equal angles at two other points on the same side of it, the four points lie on a circle.]

মনে কর, A, B দুইটি বিন্দু এবং ঐ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক AB সরল রেখার একই পার্শ্বে C ও D এরূপ অপর দুইটি বিন্দু যে

$$\angle ACB = \angle ADB.$$

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B, C ও D সমবৃত্ত হইবে।

অঙ্কন : A, B ও C এই তিন বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। ঐ বৃত্ত যদি D বিন্দু দিয়া না যায়, মনে কর এই বৃত্ত AD অথবা বর্ধিত ADকে K বিন্দুতে ছেদ করিল।

KB যুক্ত কর।

প্রমাণ : এখন $\angle ACB = \angle AKB$ (একই বৃত্তাংশে অবস্থিত বলিয়া)

কিন্তু $\angle ACB = \angle ADB$ (কল্পনা)

$\therefore \angle AKB = \angle ADB$

অর্থাৎ বহিঃকোণ = দূরবর্তী অন্তঃকোণ ;

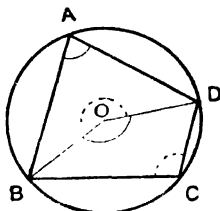
ইহা অসম্ভব।

সুতরাং A, B ও C দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত অবশ্যই D বিন্দু দিয়াও যাইবে ; অর্থাৎ বিন্দু চারিটি সমবৃত্ত।

অনুসিদ্ধান্ত। একই ভূমির উপর এবং উহার একই পার্শ্বে অঙ্কিত ত্রিভুজের শীর্ষকোণের পরিমাণ নির্দিষ্ট থাকিলে শীর্ষবিন্দুর সঞ্চার-পথ নির্দিষ্ট ভূমির প্রান্তগামী এক বৃত্তচাপ।

৫০শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।২২)

কোন বৃত্তে এক চতুর্ভুজ অন্তর্লিখিত হইলে, উহার যে-কোন বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক হয় অর্থাৎ একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান হয়।

[The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary.]

মনে কর ABCD চতুর্ভুজ একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত এবং O ঐ বৃত্তের কেন্দ্র।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

∠BAD + ∠BCD = দুই সমকোণ

এবং ∠ABC + ∠ADC = দুই সমকোণ।

OB, OD যোগ কর।

প্রমাণ : একই চাপ BCDর উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থ ∠BAD

$= \frac{1}{2} \times$ কেন্দ্রস্থ ∠BOD,

একই চাপ BADর উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থ ∠BCD

$= \frac{1}{2} \times$ কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ ∠BOD,

∴ ∠BAD + ∠BCD $= \frac{1}{2} \times$ (∠BOD + প্রবৃদ্ধ ∠BOD)

$= \frac{1}{2} \times$ চারি সমকোণ

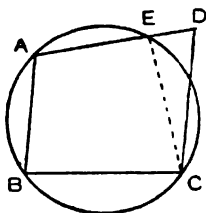
= দুই সমকোণ।

অর্থাৎ, ∠BAD ও ∠BCD এই দুই কোণ পরস্পর সম্পূরক।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় ∠ABC ও ∠ADC এই দুই কোণও পরস্পর সম্পূরক।

বিপরীতক্রমে

কোন চতুর্ভুজের যে-কোন বিপরীত দুই কোণ পরস্পর সম্পূরক হইলে উহার শীর্ষবিন্দু চারিটি সমবৃত্ত হয়।

[If the opposite angles of a quadrilateral are supplementary, its vertices are concyclic.]

মনে কর, ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং উহার বিপরীত ABC ও ADC কোণদ্বয়ের যোগফল = দুই সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B, C, D সমবৃত্ত।

মনে কর A, B ও C দিয়া এক বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। সম্ভব হইলে মনে কর, ঐ বৃত্ত D বিন্দু দিয়া না যাইয়া ADকে বা বর্ধিত ADকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

EC যুক্ত কর।

প্রমাণ : এখন ABCE চতুর্ভুজ এক বৃত্তে অন্তর্লিখিত বলিয়া ∠AEC, ∠ABCর সম্পূরক।

কিন্তু $\angle ADC$, $\angle ABC$র সম্পূরক (কল্পনা)

$\therefore \quad \angle AEC = \angle ABC$

অর্থাৎ CDE ত্রিভুজের বহিঃকোণ = দূরবর্তী অন্তঃকোণ ;

ইহা অসম্ভব।

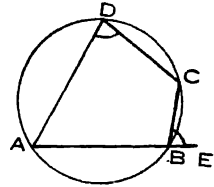
অতএব, A, B, C দিয়া যে বৃত্ত যায়, তাহা অবশ্যই D দিয়াও যায়।

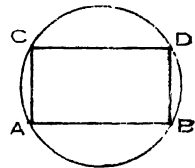
অর্থাৎ A, B, C, D সমবৃত্ত।

অনু. ১। ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। উহার AB বাহু E পর্যন্ত বর্ধিত হইল। প্রমাণ কর যে বহিঃস্থ কোণ CBE, চতুর্ভুজটির বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ ADCর সমান।

$\angle CBE + \angle CBA =$ দুই সমকোণ ;

আবার, $\angle ADC + \angle CBA =$ দুই সমকোণ ;

$\therefore \quad \angle CBE + \angle CBA = \angle ADC + \angle CBA$; উভয় পার্শ্ব হইতে সাধারণ কোণ CBA বাদ দিলে $\angle CBE = \angle ADC$.

অনু. ২। প্রমাণ করিয়া দেখাও যে, আয়তক্ষেত্র ব্যতীত অন্য সামান্তরিক বৃত্তে অন্তর্লিখিত করা যায় না।

মনে কর ABDC সামান্তরিকের শীর্ষ-বিন্দুগুলি এক পরিধিস্থ। সামান্তরিকটির বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান (উপঃ ২৫) ;

আবার উহা একই বৃত্তে অন্তর্লিখিত বলিয়া $\angle A + \angle D = 2$ সম$\angle$;

$\therefore \quad \angle A$ ও $\angle D$র প্রত্যেকে এক সমকোণের সমান ;

$\therefore \quad$ সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র।

৫১শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।৩১)

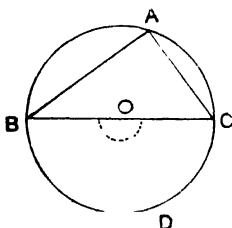
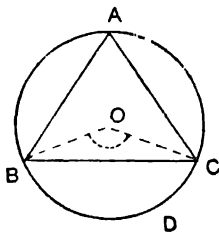
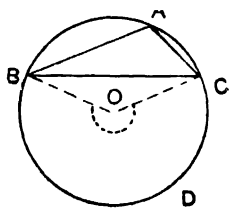
(১) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ ;

(২) অর্ধবৃত্ত হইতে বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ সূক্ষ্ম কোণ ;

(৩) অর্ধবৃত্ত হইতে ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূল কোণ।

[(1) The angle in a semi-circle is a right angle ;

(2) The angle in a segment greater than a semi-circle is less than a right angle ;

(3) The angle in a segment less than a semi-circle is greater than a right angle.]

(১নং চিত্র) (২নং চিত্র) (৩নং চিত্র)

মনে কর BACD একটি বৃত্ত ; O ঐ বৃত্তের কেন্দ্র, BAC একটি বৃত্তাংশ এবং A পরিধিস্থ যে-কোন একটি বিন্দু।

(১) মনে কর BAC বৃত্তাংশ এক অর্ধবৃত্ত। (১নং চিত্র)

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠ BAC = এক সমকোণ।

প্রমাণ : BDC চাপের উপর দণ্ডায়মান

পরিধিস্থ ∠ BAC = $\frac{1}{2}$ × কেন্দ্রস্থ ∠ BOC

কিন্তু ∠ BOC = এক সরল কোণ = দুই সমকোণ ;

∴ ∠ BAC = এক সমকোণ।

(২) মনে কর BAC বৃত্তাংশ, অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বড়। (২নং চিত্র)

প্রমাণ করিতে হইবে যে ∠ BAC = এক সূক্ষ্ম কোণ।

প্রমাণ : যেহেতু BAC বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বড়,

∴ BDC চাপ, একটি উপচাপ

∴ $\angle BOC <$ দুই সমকোণ।

কিন্তু পরিধিস্থ $\angle BAC = \frac{1}{2} \times$ কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$

∴ $\angle BAC <$ এক সমকোণ

অর্থাৎ $\angle BAC =$ এক সূক্ষ্ম কোণ।

(৩) মনে কর BAC বৃত্তাংশ, অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ছোট। (৩নং চিত্র) প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle BAC =$ এক স্থূল কোণ।

প্রমাণ : যেহেতু BAC বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ছোট,

∴ BDC চাপ একটি অধিচাপ।

∴ $\angle BOC >$ দুই সমকোণ।

কিন্তু পরিধিস্থ $\angle BAC = \frac{1}{2} \times$ কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$

∴ $\angle BAC >$ এক সমকোণ

অর্থাৎ $\angle BAC =$ এক স্থূল কোণ।

অনুশীলনী (২৮)

১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের একটিকে ব্যাস লইয়া উহার উপর একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর ; প্রমাণ কর যে, ঐ বৃত্তটি ভূমির মধ্যবিন্দু দিয়া যাইবে।

২। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস লইয়া উহার উপরে একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল ; প্রমাণ কর যে ঐ বৃত্তটি অতিভুজের বিপরীত শীর্ষ দিয়া যাইবে।

[**সঙ্কেত :** অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।]

৩। কোন ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুকে ব্যাস লইয়া উহাদের উপর দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল ; প্রমাণ করিতে হইবে যে, ঐ বৃত্তদ্বয় তৃতীয় বাহু বা বর্ধিত তৃতীয় বাহুকে একই বিন্দুতে ছেদ করিবে।

৪। রম্বসের বাহু চারিটিকে ব্যাস লইয়া উহাদের উপর চারিটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল; প্রমাণ কর যে, বৃত্তগুলি রম্বসের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে মিলিত হইবে।

৫। দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দু দিয়া প্রত্যেক বৃত্তের মধ্যে একটি করিয়া AM ও AN দুইটি ব্যাস অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ কর যে, M, B, N বিন্দু তিনটি একরেখীয় হইবে।

৬। কোন বৃত্তের (১) অন্তঃস্থ, (২) বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

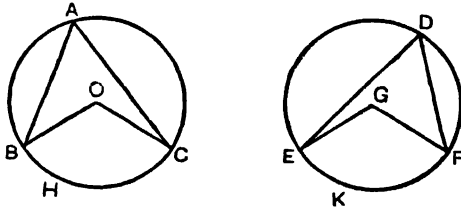
[**সঙ্কেত**ঃ নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বৃত্তের কেন্দ্রের সহিত যোগ কর। ঐ রেখাটিকে ব্যাস লইয়া এক বৃত্ত অঙ্কিত কর। ঐ বৃত্তের পরিধি ও ঐ বৃত্তের একটি চাপ যথাক্রমে সঞ্চারপথ হয়।]

৭। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া দুইটি সরল রেখা এরূপভাবে অঙ্কিত হইল যে, তাহারা পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে; এখন ঐ ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

বৃত্তের চাপ, কোণ ও জ্যা সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

৫২শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।২৬)

সমান সমান (বা একই) বৃত্তে যে সকল চাপ, কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাহারা পরস্পর সমান।

[In equal circles (or in the same circle), arcs which subtend equal angles at the centres are equal.]

মনে কর ABC ও DEF সমান বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রস্থ BOC এবং EGF কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, সমান সমান কোণ উৎপন্নকারী BHC চাপ ও EKF চাপ পরস্পর সমান।

প্রমাণ : বৃত্ত ABCকে বৃত্ত DEFএর উপর এমন ভাবে স্থাপন কর যেন, O কেন্দ্র G কেন্দ্রের উপর ও OB ব্যাসার্ধ GE ব্যাসার্ধের উপর সমাপতিত হয়।

যেহেতু GE = OB (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

∴ B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়িবে।

এখন যেহেতু ∠BOC = ∠EGF (কল্পনা)

∴ OC, GFএর উপর পড়িবে।

আবার যেহেতু OC = GF,

∴ C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে এবং বৃত্ত দুইটির পরিধিও সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

অতএব BHC ও EKF চাপ পরস্পরের সহিত মিলিয়া যাইবে।

অর্থাৎ BHC চাপ = EKF চাপ হইবে।

যে সিদ্ধান্ত দুইটি সমান সমান বৃত্তের পক্ষে প্রযোজ্য তাহা একই বৃত্তের পক্ষে অবশ্যই প্রযোজ্য হয়; কারণ, একই বৃত্তের দুই চাপকে দুইটি সমান বৃত্তস্থ মনে করা যায়।

অনু.। সমান সমান (বা একই) বৃত্তে যে সকল চাপ পরিধিতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাহারা পরস্পর সমান।

[In equal circles (or in the same circle), arcs which subtend equal angles at the circumferences, are equal.]

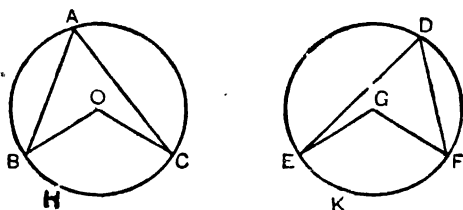
উপরের উপপাদ্যের চিত্রের ABC ও DEF সমান বৃত্ত দুইটির পরিধিস্থ BAC এবং EDF কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে BAC ও EDF এই দুইটি সমান সমান কোণ উৎপন্নকারী BHC ও EKF চাপদ্বয় পরস্পর সমান।

যেহেতু পরিধিস্থ সমান সমান কোণদ্বয় BAC ও EDF বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয়ে যথাক্রমে BOC ও EGF দুইটি কোণ উৎপন্ন করে এবং প্রত্যেকে উক্ত পরিধিস্থ সমান সমান কোণ দুইটির প্রত্যেকটির দ্বিগুণ, অতএব BHC ও EKF চাপ দুইটি পরস্পর সমান। (উপঃ ২৬)

৫৩শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।২৭)

সমান সমান (বা একই) বৃত্তের মধ্যে, সমান সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ সকল পরস্পর সমান।

[In equal circles (or in the same circle), angles at the centres which stand on equal arcs are equal.]

ধর, ABC ও DEF বৃত্ত দুইটি সমান। O ও G উহাদের কেন্দ্র এবং BHC চাপ = EKF চাপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

কেন্দ্রস্থ ∠BOC = কেন্দ্রস্থ ∠EGF.

প্রমাণঃ ABC বৃত্তকে DEF বৃত্তের উপর এমন ভাবে স্থাপন কর যেন O, Gর উপর এবং OB, GEর উপর সমাপতিত হয়।

যেহেতু, সমান সমান বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ সমান,

∴ B, Eর উপর পড়িবে

এবং পরিধি দুইটি সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যাইবে।

কিন্তু BHC চাপ = EKF চাপ

∴ C, Fএর উপর পড়িবে।

∴ OC, GFর সহিত মিলিয়া যাইবে।

অতএব, ∠BOC, ∠EGFএর সহিত মিলিয়া যাইবে

অর্থাৎ ∠BOC = ∠EGF হইবে।

স্পষ্টত দেখা যাইতেছে যে, এই সিদ্ধান্তটি একই বৃত্তের পক্ষেও সমান ভাবে প্রযোজ্য ; কারণ, একই বৃত্তের দুই চাপকে দুইটি সমান সমান বৃত্তস্থ মনে করিয়া লওয়া যায়।

অনু.। **সমান সমান (বা একই) বৃত্তের মধ্যে, সমান সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থ কোণ সকল পরস্পর সমান।**

[In equal circles (or in the same circle), angles at the circumferences which stand on equal arcs are equal.]

উপরের উপপাদ্যের চিত্রে ধর ABC ও DEF বৃত্ত দুইটি সমান। O ও G উহাদের কেন্দ্র, এবং BHC চাপ = EKF চাপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

পরিধিস্থ $\angle BAC$ = পরিধিস্থ $\angle EDF$.

BO, CO, EG ও FG যুক্ত কর।

এখন সমান সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান বলিয়া

$\angle BOC$, $\angle EGF$ পরস্পর সমান (উপঃ ২৭)

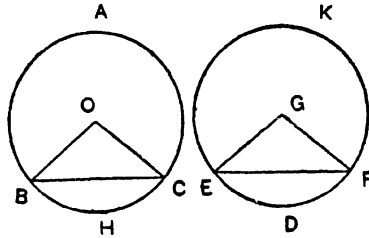
কিন্তু কেন্দ্রস্থ $\angle BOC = 2$ পরিধিস্থ $\angle BAC$

এবং কেন্দ্রস্থ $\angle EGF = 2$ পরিধিস্থ $\angle EDF$.

$\therefore$ $\angle BAC$ ও $\angle EDF$ প্রত্যেকে সমান সমান কোণের অর্ধেকের সমান বলিয়া পরস্পর সমান।

৫৪শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ৩।২৮)

সমান সমান বৃত্তে সমান সমান জ্যা দ্বারা ছিন্ন চাপ সকল পরস্পর সমান, অধিচাপ অধিচাপের ও উপচাপ উপচাপের সমান।

[In equal circles, arcs which are cut off by equal chords are equal, the major arc equal to the major arc and the minor to the minor.]

মনে কর, ABC, KEF দুইটি সমান বৃত্ত; O এবং G যথাক্রমে উহাদের কেন্দ্র।

মনে কর, জ্যা BC = জ্যা EF.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

উপচাপ BHC = উপচাপ EDF

এবং অধিচাপ BAC = অধিচাপ EKF.

OB, OC, GE, GF যুক্ত কর।

প্রমাণ : OBC ও GEF ত্রিভুজ দুইটির

যেহেতু
OB = GE (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)
OC = GF ঐ
এবং BC = EF (কল্পনা)

∴ ∠BOC = ∠EGF.

∴ BHC চাপ = EDF চাপ

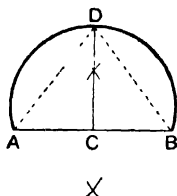
অর্থাৎ একের উপচাপ = অন্যের উপচাপ

আবার বৃত্তদ্বয় সমান,

∴ একের পরিধি = অন্যের পরিধি

∴ অবশিষ্ট BAC চাপ = অবশিষ্ট EKF চাপ

অর্থাৎ একের অধিচাপ = অন্যের অধিচাপ।

অনু.। প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্তচাপের জ্যার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক ঐ বৃত্ত-চাপটিকে উহাদের ছেদবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

মনে কর, ABD একটি বৃত্তচাপ, AB উহার জ্যা এবং AB জ্যা-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক CD, ABD চাপকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD চাপ ও BD চাপ পরস্পর সমান;

AD ও BD যুক্ত কর।

এখন ACD ও BCD ত্রিভুজ দুইটির,

AC = BC

CD = সাধারণ

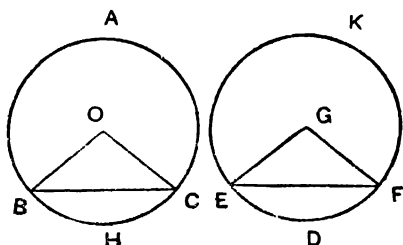
এবং ∠ACD = ∠BCD (প্রত্যেকে এক সমকোণ বলিয়া)

অতএব ACD ও BCD ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ AD চাপ = BD চাপ।

৫৫শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।২৯)

সমান সমান বৃত্তের সমান সমান চাপছেদকারী জ্যা-গুলি পরস্পর সমান।

[In equal circles chords which cut off equal arcs are equal.]

মনে কর ABC, KEF দুইটি সমান বৃত্ত এবং O ও G যথাক্রমে উহাদের কেন্দ্র।

মনে কর, BHC চাপ = EDF চাপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BC জ্যা = EF জ্যা।

OB, OC, GE, GF যুক্ত কর।

প্রমাণ : BHC চাপ = EDF চাপ,

∴ ∠BOC = ∠EGF.

এখন, OBC ও GEF ত্রিভুজ দুইটির

যেহেতু { OB = GE (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)
OC = GF ঐ
এবং অন্তর্ভূত ∠BOC = অন্তর্ভূত ∠EGF ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ;

∴ BC জ্যা = EF জ্যা।

অনুশীলনী (২৯)

[বিবিধ]

১। কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যার মধ্যবর্তী চাপ দুইটি সমান।

২। P কোন বৃত্তের চাপের উপর এক বিন্দু; AB ঐ চাপের জ্যা। প্রমাণ কর যে $\angle PAB + \angle PBA$ নিয়তই সমান।

৩। বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোন ট্রাপিজিয়মের অসমান্তরাল বাহুদ্বয় সমান।

৪। ABC কোন বৃত্তের AB, CD জ্যা E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে AED, BED ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

৫। দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দু দিয়া উভয় পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত PAQ সরল রেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে PQ, B বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে উহা নিয়তই সমান।

৬। দুইটি সমান বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দু দিয়া উভয় পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত PAQ সরল রেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে $BP = BQ$.

৭। $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর মধ্যে $BC = EF$, $\angle A = \angle D$; প্রমাণ কর যে ত্রিভুজ দুইটির পরিবৃত্তদ্বয় সমান।

৮। একই বৃত্তের দুইটি সমান সমান চাপের একই পার্শ্বস্থ দুইটি প্রান্তবিন্দু-সংযোজক সরল রেখা সমান্তরাল হইবে।

৯। বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যার প্রান্তবিন্দুগুলির (১) একই দিকের, (২) বিপরীত দিকের, সংযোজক সরল রেখা দুইটি পরস্পর সমান হয়।

১০। বৃত্তের দুইটি জ্যা এক বিন্দুতে ছেদ করিল; প্রমাণ কর যে উহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণ = জ্যা দুইটি দ্বারা ছিন্ন চাপ দুইটির অর্ধেক দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ।

বৃত্তের জ্যা দুইটি বৃত্তের বহিঃস্থ এক বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে উহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণ = জ্যা দুইটি দ্বারা ছিন্ন চাপদ্বয়ের বিয়োগফলের অর্ধেক দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ।

১১। ABC △এর A, B, C কোণের সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে AP, BQ ও CR; উহারা, ঐ ত্রিভুজকে পরিবৃত্ত করিয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় তাহার পরিধিকে P, Q, R বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে PQR ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে

$$90^\circ-\frac{A}{2},\ \ 90^\circ-\frac{B}{2},\ \ 90^\circ-\frac{C}{2}$$ র সমান হইবে।

১২। দুইটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত জ্যা দ্বারা ছিন্ন উপচাপ দুইটির সমষ্টি = বৃত্তের পরিধির অর্ধেক।

১৩। কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি E বিন্দুতে ছেদ করিল; O ঐ বৃত্তের কেন্দ্র। প্রমাণ কর যে

$$\angle AOC + \angle BOC = 2\angle AEC.$$

১৪। একই ভূমির উপর এবং উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত নির্দিষ্ট শীর্ষকোণ সমন্বিত ত্রিভুজ সকলের শীর্ষকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক সকল একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া গমন করে।

১৫। বৃত্তস্থ কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় কেন্দ্রবিন্দুতে ছেদ করিবে।

১৬। কোন চতুর্ভুজের (অন্তঃস্থ বা বহিঃস্থ) চারিটি কোণের দ্বিখণ্ডক দ্বারা উৎপন্ন চতুর্ভুজের শীর্ষগুলি একবৃত্তস্থ হয়।

১৭। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দুত্রয় এবং বাহুগুলির উপর বিপরীত শীর্ষবিন্দু হইতে লম্ব টানিলে ঐ লম্বগুলির পাদবিন্দুত্রয় এই ছয়টি বিন্দু একবৃত্তস্থ হইবে।

১৮। একটি বৃত্তে একটি ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত হইল; প্রমাণ কর যে তিন বিভিন্ন বৃত্তাংশস্থিত কোণ সকল = চারি সমকোণ।

১৯। একটি বৃত্তে একটি চতুর্ভুজ অন্তর্লিখিত হইল; প্রমাণ কর যে চারিটি বিভিন্ন বৃত্তাংশস্থিত কোণ সকল = ছয় সমকোণ।

২০। একটি বৃত্তে একটি ষড়ভুজ অন্তর্লিখিত হইল ; প্রমাণ কর যে উহার তিনটি একান্তর কোণ = চারি সমকোণ।

২১। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির যে-কোন সমান্তরাল রেখার সহিত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুদ্বয় ও ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় একবৃত্তস্থ হইবে।

২২। ABC ত্রিভুজে A ও B হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর AD, BE লম্ব টানা হইল ; উহারা O বিন্দুতে মিলিত হইল।

প্রমাণ কর যে,

(১) O, E, C, D একবৃত্তস্থ ;

(২) A, E, D, B একবৃত্তস্থ।

২৩। দুইটি ত্রিভুজের (১) ভূমি পরস্পর সমান, (২) উহাদের শীর্ষ-কোণদ্বয় পরস্পর সমান বা সম্পূরক। প্রমাণ কর যে উহাদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হইবে।

২৪। বৃত্তে অন্তর্লিখিত বহুভুজের লম্ব দ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু।

২৫। বৃত্তের ব্যাসের উভয় প্রান্ত হইতে অঙ্কিত সমান্তরাল জ্যা দুইটি সমান হয়।

২৬। কোন বৃত্তের AB ব্যাসের A ও B প্রান্তবিন্দু হইতে AP ও BQ দুইটি সমান্তরাল রেখা বৃত্তকে ছেদ করিয়া টানা হইল। প্রমাণ কর PQও একটি ব্যাস।

২৭। বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCDর AB = CD ; প্রমাণ কর যে AD, BCর ॥ এবং AC = BD.

২৮। AB কোন এক নির্দিষ্ট বৃত্তের জ্যা এবং P পরিধির উপর যে-কোন এক বিন্দু। প্রমাণ কর যে APB কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর যে-কোন একটি দিয়া যাইবে।

২৯। দুইটি ব্যাস পরস্পর লম্ব। প্রমাণ কর যে উহারা বৃত্তের পরিধিকে সমান চারি অংশে বিভক্ত করিয়াছে।

৩০। বৃত্তস্থ সমবাহু বহুভুজ ক্ষেত্রের কোণগুলি পরস্পর সমান হয়।

৩১। একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং এক নির্দিষ্ট শিরঃকোণ-বিশিষ্ট ত্রিভুজ সকলের শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩২। প্রমাণ কর যে আয়তক্ষেত্রের শীর্ষসমূহ এক পরিধিস্থ হয়।

৩৩। দুইটি সমান বৃত্তের AB সাধারণ জ্যা। B দিয়া অঙ্কিত এক সরল রেখা পরিধি দুইটির সহিত P ও Q বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে PAQ ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু।

৩৪। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির সমান্তর করিয়া অঙ্কিত সরল রেখা উহার বাহুদ্বয়কে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ উৎপন্ন হইয়াছে।

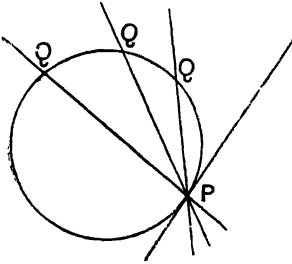
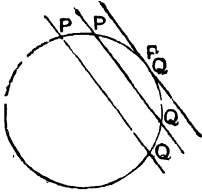
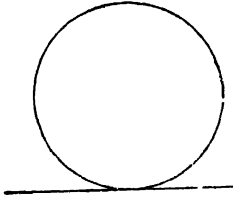
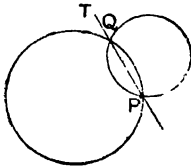
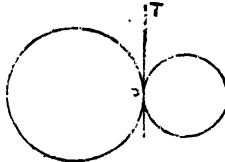
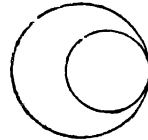
৩৫। কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে ঐ ছেদবিন্দু হইতে যে-কোন বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বকে বর্ধিত করিলে, উহা বিপরীত বাহুটিকেও সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। (ব্রহ্মগুপ্ত)

তৃতীয় অধ্যায়

স্পর্শক (Tangent)

ছেদক

যে অসীম সরল রেখা কোন বৃত্তের পরিধিকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে **ছেদক** (Secant) বলে। বৃত্তের কোন জ্যাকে উভয় দিকে বর্ধিত করিলে উহা একটি ছেদক হইবে।

এখন কোন ছেদক যদি এরূপে চলিতে থাকে যে উহার ছেদবিন্দুদ্বয় ক্রমশ পরস্পরের সন্নিহিত হয়, তবে পরিণামে উহারা এক বিন্দুতে পরিণত হইবে। তখন ঐ ছেদক ঐ বৃত্তের **স্পর্শক** (Tangent) হইয়াছে এরূপ বলা হয় এবং ঐ মিলন-বিন্দুকে **স্পর্শ-বিন্দু** (Point of contact) বলা হয়। অর্থাৎ ছেদকেরই চরম অবস্থিতির নাম স্পর্শক। এই বিষয়টি দুইটি উদাহরণ দ্বারা স্পষ্ট করা যাইতে পারে।

মনে কর, PQ একটি ছেদক এবং উহা কোন বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ঐ ছেদকটিকে যদি P বিন্দুর চতুর্দিকে ঘুরান যায় এবং P বিন্দু স্থির রাখা যায়, তবে Q বিন্দুটি পরিধির উপর দিয়া ক্রমশ P বিন্দুর সন্নিহিত হইতে থাকিবে এবং পরিশেষে P বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে। এ অবস্থানে ছেদকটি একটি স্পর্শকে পরিণত হইবে। ঐ স্পর্শকটি একটি বিশেষ ছেদক মাত্র। এ অবস্থানে ঐ রেখাটি বৃত্তটির সহিত একটি মাত্র বিন্দুতে সংলগ্ন আছে। সুতরাং উহাকে বর্ধিত করিলে উহা বৃত্তকে অপর কোন বিন্দুতে ছেদ করিবে না।

আবার মনে কর, পূর্বোক্ত PQ ছেদকটিকে সমান্তরাল ভাবে কেন্দ্র হইতে দূরে সরাইয়া লওয়া হইতেছে। তাহা হইলে উহার ছেদবিন্দুদ্বয় ক্রমশ পরস্পরের নিকট আসিতে থাকিবে এবং পরিণামে একই বিন্দুতে পরিণত হইবে। ঐ অবস্থানে ছেদকটি স্পর্শক। উহাকে উভয় দিকে বর্ধিত করিলে উহা বৃত্তকে দ্বিতীয় বিন্দুতে ছেদ করে না।

অতএব যে সরল রেখা বৃত্তের পরিধিকে একটি মাত্র বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং যাহাকে উভয় দিকে বর্ধিত করিলে ঐ পরিধিকে কোন দ্বিতীয় বিন্দুতে ছেদ করে না তাহাকে ঐ বৃত্তের স্পর্শক বলা হয়।

(১নং চিত্র) (২নং চিত্র) (৩নং চিত্র)

দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না। মনে কর, দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন একটি বৃত্তকে অপর বৃত্ত হইতে এইরূপে সরাইয়া লও যেন P ও Q বিন্দু ক্রমশ নিকটতর হইয়া পরিশেষে এক বিন্দু হয়। এই সর্বশেষ অবস্থানে ঘূর্ণমান বৃত্তটি অপর বৃত্তকে কেবলমাত্র স্পর্শ করিয়াছে।

এখন দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে দুই প্রকারে স্পর্শ করিতে পারে—অন্তঃস্পর্শ ও বহিঃস্পর্শ।

যদি একটি বৃত্ত অপর একটি বৃত্তের অন্তর্গত থাকিয়া তাহাকে স্পর্শ করে তাহা হইলে তাহাকে **অন্তঃস্পর্শ** (Internal contact) বলে। এরূপ ক্ষেত্রে বৃত্ত দুইটি উহাদের সাধারণ স্পর্শকের একই দিকে অবস্থান করে (৩নং চিত্র)

আর যদি একটি বৃত্ত অপর একটি বৃত্তের বহির্গত থাকিয়া তাহাকে স্পর্শ করে তাহা হইলে তাহাকে **বহিঃস্পর্শ** (External contact) বলে। এরূপ ক্ষেত্রে বৃত্ত দুইটি উহাদের সাধারণ স্পর্শকের বিপরীত দিকে অবস্থান করে (২নং চিত্র)

আবার PQ ছেদকটি উভয় বৃত্তকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে বলিয়া উহা বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক। সুতরাং যদি কোন সরল রেখা দুইটি বৃত্তকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহা হইলে তাহাকে ঐ বৃত্ত দুইটির **সাধারণ স্পর্শক** (Common tangent) বলে।

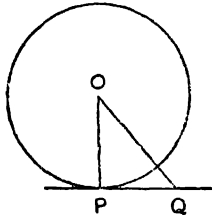
কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে যদি বৃত্তের কোন স্পর্শক অঙ্কিত করা যায় তাহা হইলে ঐ বহিঃস্থ বিন্দু হইতে স্পর্শবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখাই **ঐ বিন্দু হইতে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকটির দৈর্ঘ্য** (Tangent to the circle drawn from that point).

কোন একটি ঋজুরেখ (ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ইত্যাদি) ক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহু কোন একটি বৃত্তের পরিধিকে স্পর্শ করিলে, ঐ বৃত্তটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের **অন্তর্লিখিত** (inscribed) করিয়া অঙ্কিত করা হইয়াছে বলা হয় এবং ঐ ক্ষেত্রটি ঐ বৃত্তের **পরিলিখিত** (circumscribed) হইয়াছে এরূপ বলা হয়।

স্পর্শক সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

৫৬শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।১৮)

বৃত্তের কোন বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কিত করিলে উহা স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব হইবে।

[The tangent at any point of a circle is perpendicular to the radius through the point.]

মনে কর O বিন্দু কোন বৃত্তের কেন্দ্র এবং ঐ বৃত্তের P বিন্দুতে PT একটি স্পর্শক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে PT, OP ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

PTতে একটি বিন্দু Q লও; এবং OQ যুক্ত কর।

প্রমাণ: এখন PT ঐ বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক বলিয়া, P বিন্দু ভিন্ন PTর অপর সকল বিন্দুই বৃত্তের বাহিরে আছে।

$\therefore$ OP ব্যাসার্ধ $<$ OQ.

এইরূপে দেখান যায় যে O কেন্দ্র হইতে PT স্পর্শক পর্যন্ত যত সরল রেখা টানা যায় তাহার মধ্যে OPই ক্ষুদ্রতম।

$\therefore$ OP, PTর উপর লম্ব।

(অথবা PT, OPর উপর লম্ব।)

অনুসিদ্ধান্ত ১। কোন বৃত্তের পরিধির কোন বিন্দুতে একটি মাত্র স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

যদি P বিন্দুতে PT, PT′ দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায় তবে PT, PT′এর সহিত সমাপতিত হইবে; কারণ তাহা না হইলে PT ও PT′ দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরল রেখা P বিন্দুতে OPT ও OPT′ যে দুইটি কোণের উৎপত্তি করে তাহারা প্রত্যেকেই এক সমকোণের সমান, কিন্তু ইহা অসম্ভব।

অনুসিদ্ধান্ত ২। যে-কোন বৃত্তের স্পর্শবিন্দুর মধ্য দিয়া স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যায়।

[If a straight line is drawn perpendicular to a tangent to a circle from the point of contact, it passes through the centre of that circle. *Euc.* 3. 19.]

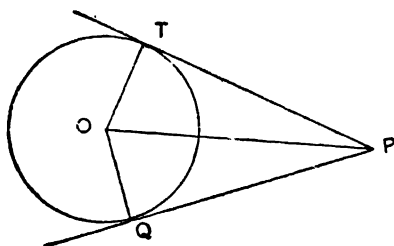
যদি স্পর্শক PTর P বিন্দুতে PO′ একটি লম্ব অঙ্কিত হয়, তবে PO′, POর সহিত একই দিকে সমাপতিত হইবে, তাহা না হইলে P বিন্দুতে দুইটি পরস্পরচ্ছেদী রেখাই PTর উপর লম্ব হইবে; ইহা অসম্ভব।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে স্পর্শকের উপর লম্ব অঙ্কিত করিলে, ঐ লম্ব স্পর্শবিন্দু দিয়া যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ৪। বৃত্তের পরিধির কোন বিন্দুতে উহার মধ্যগত ব্যাসার্ধের উপর লম্ব অঙ্কিত করিলে, উহা ঐ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হয়।

৫৭শ উপপাদ্য

বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করিলে উহারা সমান হইবে এবং উহারা বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করিবে তাহারাও সমান হইবে।

[If two tangents are drawn to a circle from an external point, (i) they are equal, (ii) they subtend equal angles at the centre of the circle.]

মনে কর O একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং উহার বহিঃস্থ কোন বিন্দু P হইতে PT, PQ দুইটি স্পর্শক ঐ বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করিতেছে।

OP, OT, OQ যুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PT = PQ

এবং ∠TOP = ∠QOP.

প্রমাণ : বৃত্তের T বিন্দুতে PT একটি স্পর্শক এবং OT একটি ব্যাসার্ধ।

∴ ∠OTP = এক সমকোণ ;

এইরূপে ∠OQP = এক সমকোণ।

এখন OPT, OPQ সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যে

যেহেতু { OT = OQ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),
OP অতিভুজ সাধারণ
এবং ∠OTP = ∠OQP

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ;

∴ $PT = PQ$

এবং $\angle TOP = \angle QOP$.

অনু.। যদি কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উহাতে দুইটি স্পর্শক টানা যায় তবে উহা ঐ বৃত্তের কেন্দ্র ও বহিঃস্থ বিন্দুর সংযোগের সরল রেখার উপর সমভাবে নত।

কারণ উপরের উপপাদ্যে প্রমাণিত হইয়াছে যে OPT ও OPQ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ; ∴ $\angle OPQ = \angle OPT$.

দ্রষ্টব্য : বহিস্থ যে-কোন একটি বিন্দু হইতে একটি বৃত্তে দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি স্পর্শক টানা যাইতে পারে।

মনে কর উপরের উপপাদ্যের চিত্রে O একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং P বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে, P হইতে ঐ বৃত্তে দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

OP যুক্ত কর, এবং OP কে ব্যাস লইয়া যদি একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। মনে কর উহারা পূর্বোক্ত বৃত্তটিকে T ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

PT, PQ, OQ ও OT যুক্ত কর।

প্রমাণ : এখন $\angle OTP$ ও $\angle OQP$ অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া প্রত্যেকে এক সমকোণ।

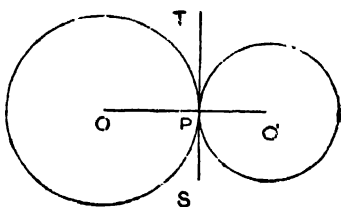
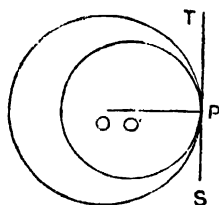
সুতরাং PT ও PQ যথাক্রমে ব্যাসার্ধ OT ও OQ এর উপর লম্ব।

∴ PT ও PQ, O কেন্দ্রবিশিষ্ট-বৃত্তের স্পর্শক।

আবার OP ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত বৃত্ত ও O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটির যে-কোন একটি ছেদবিন্দু T র সহিত P যুক্ত করিলেই একটি স্পর্শক পাওয়া যায় এবং দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না বলিয়া P হইতে দুইএর অধিক স্পর্শক ঐ বৃত্তে অঙ্কিত করা যায় না।

৫৮শ উপপাদ্য (ইউক্লিড ৩।১১, ১২)

দুইটি বৃত্ত যদি পরস্পর স্পর্শ করে, তবে উহাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু একই সরল রেখায় অবস্থিত থাকে ।

[If two circles touch, the point of contact lies on the straight line through the centres.]

১নং চিত্র (বহিঃস্পর্শ)

২নং চিত্র (অন্তঃস্পর্শ)

মনে কর O ও O′ দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং ঐ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, O, O′ ও P একই সরল রেখায় অবস্থিত ।

OP, O′P যুক্ত কর ।

প্রমাণ : যেহেতু বৃত্ত দুইটি P বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করে,

∴ P বিন্দুতে উহাদের একটি সাধারণ স্পর্শক আছে ।

মনে কর TPS উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক ।

∴ OP, O′P স্পর্শবিন্দুগামী দুইটি ব্যাসার্ধ ;

অতএব ∠TPO ও ∠TPO′ উভয়ই সমকোণ ।

∴ ২নং চিত্রে OP, O′P মিলিত হইবে এবং

১নং চিত্রে OP, O′P এক সরল রেখা হইবে ।

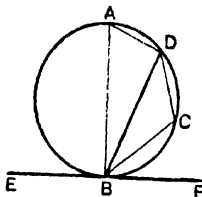
∴ উভয় অবস্থানেই O, P, O′ এক সরল রেখায় অবস্থিত ।

দ্রষ্টব্য : বৃত্ত দুইটি বহিঃস্পর্শ করিলে উহাদের কেন্দ্র দুইটির দূরত্ব উহাদের ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান এবং অন্তঃস্পর্শ করিলে উহাদের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান ।

দুইটি বৃত্তের একটি স্পর্শক থাকিলে উহারা স্পর্শবিন্দুতে মিলিত হইবে ।

৫৯শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।৩২)

কোন বৃত্তের এক বিন্দু দিয়া একটি জ্যা ও একটি স্পর্শক টানিলে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা যথাক্রমে একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণদ্বয়ের সমান হয়।

[If a straight line touch a circle and from the point of contact a chord be drawn, the angles which this chord makes with the tangent are equal to the angles in the alternate segments.]

মনে কর ABC একটি বৃত্ত এবং উহার B বিন্দুতে স্পর্শক EBF ও যে-কোন জ্যা BD অঙ্কিত করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\angle$FBD = একান্তর BAD বৃত্তাংশস্থ যে-কোন একটি কোণ

এবং $\angle$EBD = একান্তর BCD বৃত্তাংশস্থ যে-কোন একটি কোণ।

B বিন্দু দিয়া AB ব্যাস অঙ্কিত কর। DCB উপচাপের উপর যে-কোন এক বিন্দু C লইয়া, AD, DC, CB যুক্ত কর।

প্রমাণ : (১) যেহেতু AB স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাস

$\therefore$ $\angle$FBA = এক সমকোণ।

আবার ADB অর্ধবৃত্তের $\angle BDA$ = এক সমকোণ;

$\therefore \quad \angle BAD + \angle ABD$ = এক সমকোণ $= \angle FBA$

$= \angle ABD + \angle FBD$

$\therefore \quad \angle BAD = \angle FBD.$

(২) যেহেতু BCDA একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

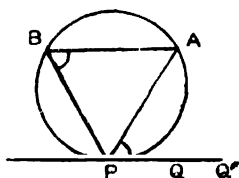
$\therefore \quad \angle BAD + \angle BCD$ = দুই সমকোণ

$= \angle EBD + \angle FBD$;

কিন্তু $\angle BAD = \angle FBD$;

$\therefore \quad \angle BCD = \angle EBD.$

অনু.। PQ একটি সরল রেখা, উহার একই পার্শ্বে P বিন্দুতে, PA, PB যে-কোন দুইটি সরল রেখা অঙ্কিত কর। AB যুক্ত কর ; তাহা হইলে ABP একটি ত্রিভুজ হইল। এখন যদি $\angle APQ = \angle ABP$ হয়, তবে প্রমাণ করিতে হইবে যে

PQ, P বিন্দুতে ABP ত্রিভুজের পরিবৃত্তের স্পর্শক।

মনে কর PQ′, P বিন্দুতে ঐ পরিবৃত্তের স্পর্শক ;

$\therefore \quad \angle APQ' = \angle ABP$;

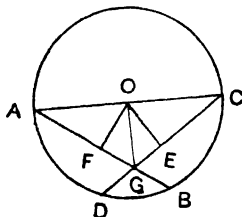
কিন্তু $\angle APQ = \angle ABP$ (কল্পনা) ;

$\therefore \quad \angle APQ' = \angle APQ$;

অতএব PQ ও PQ′ পরস্পরের উপর সমাপতিত এবং PQ, P বিন্দুতে ABP ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের স্পর্শক।

৬০শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।৩০)

কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা যদি বৃত্তের কোন অন্তঃস্থ বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে, তবে একটির অংশ দুইটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশ দুইটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।

[If two chords of a circle intersect within it, the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.]

ADBC বৃত্তের জ্যা AB, CD, G বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, আয়ত AG.GB = আয়ত CG.GD.

মনে কর O বিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র ; AB ও CDর উপর OF ও OE লম্ব অঙ্কিত কর। AO, OG, OC যোগ কর।

প্রমাণ : আয়ত $AG.GB = (AF+FG)(FB-FG)$

$= (AF+FG)(AF-FG)$

($\because$ F, ABর মধ্যবিন্দু)

$= AF^2 - FG^2$

$= (AF^2+OF^2)-(FG^2+OF^2)$

$= AO^2 - OG^2$

($\because$ F বিন্দুস্থ কোণদ্বয় সমকোণ)

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে

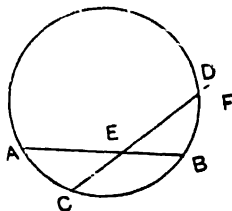
আয়ত $CG.CD = CO^2 - OG^2 = AO^2 - OG^2$

(ব্যাসার্ধ বলিয়া)

$\therefore$ আয়ত $AG.GB =$ আয়ত $CG.GD$.

৬১শ উপপাদ্য

যদি দুইটি সরল রেখা পরস্পর এমন ভাবে ছেদ করে যাহাতে একের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হয়, তাহা হইলে সরল রেখা দুইটির প্রান্তগুলি এক বৃত্তস্থ হইবে।*

[If two straight lines cut one another so that the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other, the four extremities of the straight lines are concyclic.]

AB, CD সরল রেখা দুইটি এমন ভাবে E বিন্দুতে ছেদ করিল যাহাতে, আয়ত AE. EB = আয়ত CE. ED.

প্রমাণ করিতে হইবে যে A, B, C, D বিন্দুগুলি এক বৃত্তস্থ।

প্রমাণ : যদি A, C, B বিন্দু দিয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত হয় তাহা D বিন্দু দিয়া না যায়, তবে মনে কর উহা CDকে F বিন্দুতে আবার ছেদ করিল।

তাহা হইলে, আয়ত CE. EF = আয়ত AE. EB
= আয়ত CE. ED ;

∴ EF = ED, কিন্তু ইহা অসম্ভব যদি F ও D বিন্দু পরস্পর মিশিয়া না যায় ;

অতএব, A, C, B বিন্দুগামী বৃত্ত D বিন্দু দিয়াও যাইবে

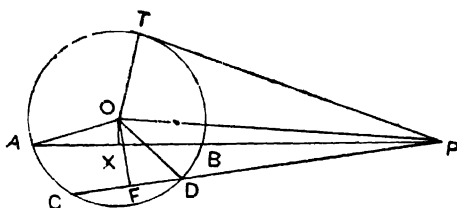
অর্থাৎ, A, B, C, D বিন্দুগুলি এক বৃত্তস্থ।

---

* ইহা পূর্ব উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা।

৬২শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।৩৬)

কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা যদি উহাদের বর্ধিতাংশে কোন এক বহিঃস্থ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে, তবে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান ; এবং উক্ত আয়তক্ষেত্রের জ্যাদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে বৃত্তের স্পর্শকের উপর বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

[If two chords of a circle, when produced, cut at a point outside it, the rectangle contained by their segments are equal ; and each rectangle is equal to the square on the tangent from the point of intersection.]

ABC বৃত্তের জ্যা দুইটি AB, CD বর্ধিত করিয়া বহিঃস্থ বিন্দু Pতে ছেদ করান হইল ; এবং মনে কর P বিন্দু হইতে PT, বৃত্তটির স্পর্শক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

আয়ত AP. PB = আয়ত CP. PD

= ATর উপর বর্গক্ষেত্র।

মনে কর O, বৃত্তটির কেন্দ্র এবং AB ও CDর উপর OX ও OF দুইটি লম্ব অঙ্কিত হইয়াছে।

OA, OD, OP এবং OT যোগ কর।

প্রমাণ : আয়ত $AP.PB = (XP + AX)(XP - BX)$

$= (XP + AX)(XP - AX)$

(∵ X, ABর মধ্যবিন্দু)

$= XP^2 - AX^2$

$= (XP^2 + OX^2) - (AX^2 + OX^2)$

$= OP^2 - OA^2$

(∵ X বিন্দুস্থ কোণদ্বয় প্রত্যেকে সমকোণ)

একই রূপে প্রমাণ করা যায় যে,

আয়ত $CP.PD = OP^2 - OD^2$

এবং যেহেতু ব্যাসার্ধ OT, PT স্পর্শকের উপর লম্ব,

∴ $PT^2 = OP^2 - OT^2$

কিন্তু, $AO = OD = OT$, (ব্যাসার্ধ বলিয়া)

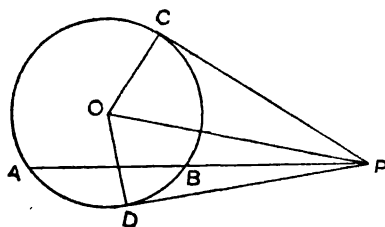
∴ আয়ত AP. PB = আয়ত CP. PD = PTর উপর বর্গক্ষেত্র।

বিপরীতক্রমে, যদি AB ও CD সরল রেখাদ্বয় বহিঃস্থভাবে P বিন্দুতে এমন ভাবে ছেদ করে যাহাতে আয়ত AP. PB = আয়ত CP. DP, তাহা হইলে A, B, C ও D বিন্দুগুলি একই বৃত্তস্থ হইবে।

প্রমাণ, ৬১শ উপপাদ্যের ন্যায় করিতে হইবে।

৬৩শ উপপাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।৩৭)

যদি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত দুইটি সরল রেখার একটি বৃত্তকে ছেদ করে ও অন্যটি বৃত্তের সহিত মিলিত হয়, এবং যদি সমগ্র ছেদক ও বৃত্তের বহিঃস্থ উহার অংশ, এই উভয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্য রেখাটির উপরস্থ বর্গক্ষেত্রের সমান হয়, তবে অন্য রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক।

[If from a point outside a circle two straight lines are drawn, one of which cuts the circle and the other meets it; and if the rectangle contained by the whole line which cuts the circle and the part of it outside the circle is equal to the square on the line which meets the circle, then the line which meets the circle is a tangent to it.]

ABC বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দু হইতে PBA ও PC সরল রেখা দুইটি অঙ্কিত হইল, উহার PA, বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করিল এবং PC, C বিন্দুতে বৃত্তটির সহিত মিশিল, যাহাতে আয়ত $AP.PB = PC^2$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে PC, বৃত্তটির স্পর্শক।

মনে কর, PD বৃত্তটির একটি স্পর্শক,

বৃত্তটির কেন্দ্র O ;

OD, OC, OP যোগ কর।

প্রমাণঃ যেহেতু, PC^2 = আয়ত AP. PB

= PD^2 (∵ PD একটি স্পর্শক

এবং PC = PD)

POC, POD ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

OC = OD, OP সাধারণ বাহু

এবং PC = PD ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান ;

∴ $\angle OCP = \angle ODP$

= এক সমকোণ (∵ PD একটি স্পর্শক)

∴ PC, ABC বৃত্তের একটি স্পর্শক।

অনুশীলনী (৩০)

[বিবিধ]

১। বৃত্তের কোন ব্যাসের উভয় প্রান্তে দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করিলে, উহারা সমান্তরাল হইবে।

২। কোন বৃত্তের দুইটি স্পর্শক সমান্তরাল হইলে, উহাদের স্পর্শবিন্দুদ্বয়-সংযোজক সরল রেখা বৃত্তটির একটি ব্যাস হইবে।

৩। কোন ব্যাসের উভয় প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সহিত সমান্তরাল করিয়া বৃত্তের মধ্যে যে সকল জ্যা টানা যায়, উহারা প্রত্যেকেই ঐ ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

৪। দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিয়াছে। উহাদের উভয়কে স্পর্শ করিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত দুই কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় উক্ত বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ হয়।

৫। কোন বৃত্তের পরিলিখিত একটি চতুর্ভুজ অঙ্কিত করিলে উহার দুই বিপরীত বাহুর সমষ্টি = অপর দুই বিপরীত বাহুর সমষ্টি।

৬। উপরের অনুশীলনের বিপরীত অনুশীলনী বিবৃত ও প্রমাণ কর।

৭। যে সমস্ত বৃত্ত কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে কোন এক নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৮। যে সমস্ত বৃত্ত কোন দুইটি নির্দিষ্ট সমান্তরাল সরল রেখাকে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৯। যে সমস্ত বৃত্ত কোন নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এবং যাহারা এক নির্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১০। যে সমস্ত বৃত্ত কোন এক নির্দিষ্ট বৃত্তকে কোন এক নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১১। দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক ঐ বৃত্তের অপর একটি স্পর্শকের যে অংশ ছেদ করে, তাহা ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে এক সমকোণ উৎপন্ন করিবে।

১২। দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রীয়। প্রমাণ কর যে, বৃহত্তর বৃত্তের যে সকল জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে স্পর্শ করে, তাহারা পরস্পর সমান হয়।

১৩। দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রীয়। প্রমাণ কর যে বৃহত্তর বৃত্তের যে সকল জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে স্পর্শ করে, তাহারা প্রত্যেকে স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

১৪। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে সমান সমান জ্যা লওয়া হইল; প্রমাণ কর যে, উহারা একটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে উহাদের মধ্যবিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

১৫। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, অন্তঃকেন্দ্র, ও শীর্ষ একই রেখায় অবস্থান করে।

[**সঙ্কেত:** অন্তঃকোণ শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। ঐ দ্বিখণ্ডক ভূমিকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে। সুতরাং উহা পরিকেন্দ্র দিয়া যাইবে।]

১৬। বৃত্তে পরিলিখিত যে-কোন সামান্তরিক একটি রম্বস্ হয়।

১৭। বৃত্তে পরিলিখিত যে-কোন আয়তক্ষেত্র একটি বর্গক্ষেত্র হয়।

১৮। কোন বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের উপর নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট স্পর্শক টানা হইলে, ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১৯। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তরাল করিয়া একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর। এরূপ কয়টি স্পর্শক আঁকা সম্ভব ?

২০। কোন বৃত্তের পরিধি, তিনটি বিন্দু দ্বারা তিনটি সমান চাপে বিভক্ত হইল। প্রমাণ কর যে ঐ বিন্দুত্রয় দিয়া স্পর্শকগুলি টানিলে একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

২১। কোন নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এরূপ এক বৃত্ত অঙ্কন কর যাহা এক নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে। এরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কন করা সম্ভব ?

২২। কোন বৃত্তের পরিধি, চারিটি বিন্দু দ্বারা চারিটি সমান চাপে বিভক্ত হইল। প্রমাণ কর যে, ঐ বিন্দুচতুষ্টয় দিয়া স্পর্শকগুলি টানিলে একটি বর্গক্ষেত্র উৎপন্ন হয়।

২৩। কোন বৃত্ত দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে স্পর্শ করিল। উক্ত বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২৪। দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব উহাদের ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান হইলে উহারা বহিঃস্পর্শী হইবে ; ঐ দূরত্ব উহাদের ব্যাসার্ধের অন্তরফলের সমান হইলে উহারা অন্তঃস্পর্শী হইবে।

২৫। দুইটি বৃত্ত বহিঃস্থভাবে A বিন্দুতে স্পর্শ করে ; যদি এক সরল রেখা উভয় বৃত্তকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবে প্রমাণ কর যে, $\angle BAC =$ এক সমকোণ।

২৬। বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যে-কোন দুই বিপরীত বাহু বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ দুইটি উৎপন্ন করে, তাহারা পরস্পর সম্পূরক।

২৭। কোন বৃত্তের OA, OB দুইটি নির্দিষ্ট স্পর্শক। অপর এক স্পর্শক PQ, OA, OB স্পর্শকদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ

করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, PQ সরল রেখা বৃত্তের কেন্দ্রে এক নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে।

২৮। যদি কতকগুলি বৃত্ত পরস্পরকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবে ঐ সকল বৃত্তের কেন্দ্র সকল একই সরল রেখাস্থ হইবে।

২৯। দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে। ঐ স্পর্শবিন্দু দিয়া উভয় পরিধি পর্যন্ত এক সরল রেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে, ঐ রেখার উভয় প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

৩০। তিনটি বৃত্ত এরূপভাবে অঙ্কিত হইল যে, উহাদের প্রত্যেকে অপর দুইটিকে স্পর্শ করিল। প্রমাণ কর যে, স্পর্শবিন্দুগুলিতে অঙ্কিত সাধারণ স্পর্শকগুলি সমবিন্দু।

৩১। বৃত্তের পরিলিখিত দুই বাহু সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, অপর বাহু দুইটির প্রত্যেকে ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে এক সমকোণের সৃষ্টি করে।

৩২। পরস্পরস্পর্শী দুই বৃত্তের স্পর্শবিন্দু হইতে দুই সরল রেখা টানিয়া একটি বৃত্তকে A, B বিন্দুতে এবং অপরটিকে C, D বিন্দুতে ছেদ করিলে AB, CD সমান্তরাল হয়।

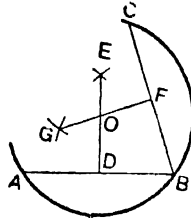
৩৩। পরস্পরচ্ছেদী দুই বৃত্তের একটি ছেদবিন্দু দিয়া প্রত্যেক বৃত্তের এরূপ এক জ্যা টান যাহা অপরটিকে স্পর্শ করে। প্রমাণ কর যে, ঐ জ্যা দুইটি অন্য ছেদবিন্দুটিতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

চতুর্থ অধ্যায়

বৃত্ত সম্বন্ধীয় সম্পাদ্য

২৬শ সম্পাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।১)

একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত বা চাপের কেন্দ্র বাহির করিতে হইবে।

[To find the centre of a given circle, or of a given arc.]

চাপটির A, B, C যে-কোন তিনটি বিন্দু লও।

AB ও BC যোগ কর।

AB ও BCকে DE, FG লম্ব দুইটির দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর।

উহারা O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল।

তাহা হইলে O বিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র।

প্রমাণ : A ও B বিন্দু দুইটি হইতে সমান দূরে সঞ্চরণশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ DE,

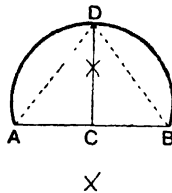
এবং B ও C বিন্দু দুইটি হইতে সমান দূরে সঞ্চরণশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ FG.

তাহা হইলে উহাদের সাধারণ বিন্দু O, A, B এবং C হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

অর্থাৎ, O বিন্দুটি চাপটির কেন্দ্র।

২৭শ সম্পাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।৩০)

একটি নির্দিষ্ট চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a given arc.]

ADB নির্দিষ্ট চাপ।

ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AB যোগ কর এবং ইহাকে C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। C বিন্দুতে ABর উপর CD লম্বটি অঙ্কিত কর। উহা চাপটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে চাপটি D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

প্রমাণ : AD, DB যোগ কর।

A ও B বিন্দু হইতে সমান দূরে সঞ্চরণশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ CD,

∴ AD = BD

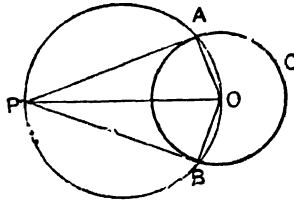
কিন্তু সমান সমান জ্যা সমান সমান চাপ খণ্ডিত করে,

∴ চাপ AD = চাপ BD

অর্থাৎ, চাপটি D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

২৮শ সম্পাদ্য (ইউক্লিড্ ৩৷১৭)

একটি বৃত্তের বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a tangent to a circle from a given point outside it.]

ABC নির্দিষ্ট বৃত্ত ও P একটি নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু।

P বিন্দু হইতে ABC বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : O বৃত্তটির কেন্দ্র। OP যোগ কর। OPকে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা নির্দিষ্ট বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। PA ও PB যোগ কর।

তাহা হইলে PA অথবা PB উদ্দিষ্ট স্পর্শক।

প্রমাণ : OA ও OB যোগ কর ;

যেহেতু OAP একটি অর্ধবৃত্ত,

∴ $\angle$OAP একটি সমকোণ ;

∴ PA ব্যাসার্ধ OAর উপর লম্ব।

অতএব, PA একটি স্পর্শক।

এইরূপে PBও একটি স্পর্শক।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে একটি বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করিলে, উহারা পরস্পর সমান এবং কেন্দ্রে উহাদের বিপরীত যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারাও সমান।

প্রমাণ : AOP, BOP সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

$$AO = BO$$

এবং অতিভুজ OP সাধারণ বাহু ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

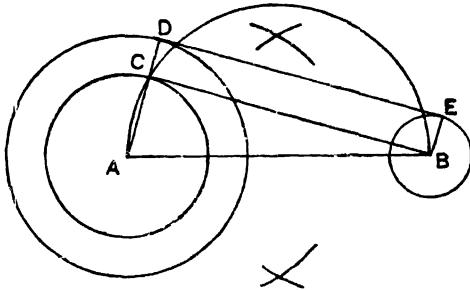
$$\therefore \quad AP = BP,$$

$$\angle AOP = \angle BOP$$

এবং $\angle APO = \angle BPO$.

২৯শ সম্পাদ্য

দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a common tangent to two given circles.]

A বৃহত্তর বৃত্তটির এবং B ক্ষুদ্রতর বৃত্তটির কেন্দ্র।

অঙ্কন: (১) Aকে কেন্দ্র করিয়া এবং বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তরফলের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। BC উহার স্পর্শক অঙ্কিত কর।

AC যোগ কর এবং উহাকে বর্ধিত করিয়া বৃহত্তর বৃত্তটির সহিত D বিন্দুতে মিশাইয়া দাও।

ADর সমান্তরাল করিয়া B বিন্দু হইতে BE ব্যাসার্ধটি অঙ্কিত কর। DE যোগ কর।

তাহা হইলে DE বৃত্ত দুইটির সাধারণ স্পর্শক।

প্রমাণ: যেহেতু, AC = AD − BE,

∴ CD = BE,

এবং ইহারা সমান্তরাল ;

অতএব DCBE একটি সামান্তরিক।

আবার, $\angle ACB$ একটি সমকোণ ;

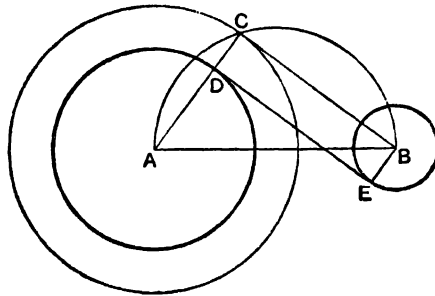
$\therefore$ $\angle BCD$ একটি সমকোণ ;

$\therefore$ DCBE একটি আয়তক্ষেত্র।

তাহা হইলে $\angle ADE$, $\angle BED$ প্রত্যেকে এক সমকোণ,

অর্থাৎ DE বৃত্ত দুইটির সাধারণ স্পর্শক।

এইরূপে নিম্নদিকেও আর একটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

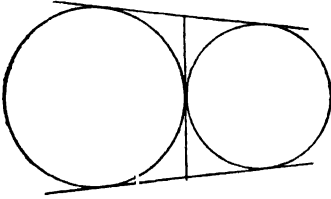
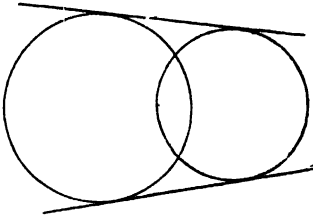
(২) নিম্ন প্রদর্শিতরূপে আরও দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়

অঙ্কন : Aকে কেন্দ্র করিয়া এবং বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের যোগফলের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। BC উহার স্পর্শক অঙ্কিত কর।

[ইহার পরের অঙ্কন ও প্রমাণ পূর্ব ক্ষেত্রের অনুরূপ, তবে BEকে ADর উল্টামুখে অঙ্কিত করিবে]

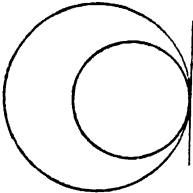
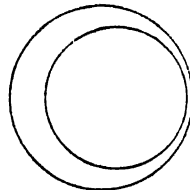
সরল ও তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক

যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ বা স্পর্শ না করে, তবে তাহাদের চারিটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

সংজ্ঞা। কেন্দ্র দুইটির সংযোজক রেখার একই পার্শ্বে স্পর্শকটি হইলে তাহাকে **সরল সাধারণ স্পর্শক** (Direct common tangent) বলে,

আর সংযোজক রেখাটিকে ছেদ করিয়া অবস্থিত হইলে তাহাকে **তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক** (Transverse common tangent) বলে। পূর্ব প্রতিজ্ঞার প্রথম চিত্রের স্পর্শক দুইটি সরল, ও দ্বিতীয় চিত্রের স্পর্শক দুইটি তির্যক্।

যদি বৃত্ত দুইটি পরস্পর বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে, তবে তিনটি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যায় (১নং চিত্র)।

(১নং চিত্র)

যদি বৃত্ত দুইটি পরস্পর ছেদ করে, তবে দুইটি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যায় (২নং চিত্র)।

(২নং চিত্র)

(৩নং চিত্র) (৪নং চিত্র)

আর যদি বৃত্ত দুইটির একটি অন্যটিকে অন্তর্গতভাবে স্পর্শ করে, তবে একটি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যায় (৩নং চিত্র)। আর যদি একটি বৃত্ত

অন্যটির অন্তর্গত হয় এবং উহাকে স্পর্শ না করে, তবে কোন সাধারণ স্পর্শকই অঙ্কিত করা যায় না (৪নং চিত্র)।

অনুশীলনী (৩১)

১। $2''$ ব্যাসার্ধ লইয়া এক বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং কেন্দ্র হইতে $4''$ দূরের কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তটির উপর দুইটি স্পর্শক আঁক।

স্পর্শবিন্দুদ্বয়-সংযোজক জ্যার দৈর্ঘ্য মাপিয়া বাহির কর।

২। দুইটি বৃত্ত নিম্নলিখিত অবস্থানে থাকিলে, উহাদের কতগুলি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায় ?—

(ক) দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে,

(খ) দুইটি বৃত্ত যাহারা পরস্পর ছেদ করে নাই,

(গ) একটি অপরটির বহিঃস্পর্শী হইয়াছে,

(ঘ) একটি অপরটির অন্তঃস্পর্শী হইয়াছে।

(ক) ও (খ) উদাহরণে কখন্ কখন্ কোন সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা সম্ভব হইবে না ?

৩। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের এইরূপ এক স্পর্শক টান, যাহা এক সরল রেখার সমান্তরাল বা লম্ব।

৪। দুইটি বৃত্তের উপর অঙ্কিত একই প্রকারের সাধারণ (সরল সাধারণ বা তির্যক্ সাধারণ) স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান।

৫। যদি দুই বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব d হয়, এবং উহাদের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে a, b হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, (১) উহাদের প্রত্যেক সরল সাধারণ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $\sqrt{d^2-(a-b)^2}$ হইবে ; এবং (২) উহাদের প্রত্যেক তির্যক্ সাধারণ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $\sqrt{d^2-(a+b)^2}$ হইবে।

৬। প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্তের সরল বা তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক দুইটি, বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র-সংযোজক সরল রেখার উপর ছেদ করে।

৭। দুইটি বহিঃস্পর্শী বৃত্তের সরল সাধারণ স্পর্শক উহাদের সাধারণ স্পর্শবিন্দুতে সমকোণ উৎপন্ন করে।

৮। দুইটি সমান বৃত্তের উপর দুইটি তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক টানিলে উহারা বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র-সংযোজক সরল রেখার মধ্যবিন্দুতে ছেদ করে।

৯। তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এক বৃত্ত অঙ্কিত কর।

১০। এরূপ এক বৃত্ত অঙ্কন কর যাহা দুইটি সমান্তরাল রেখা এবং ইহার একটি ছেদককে স্পর্শ করিয়াছে।

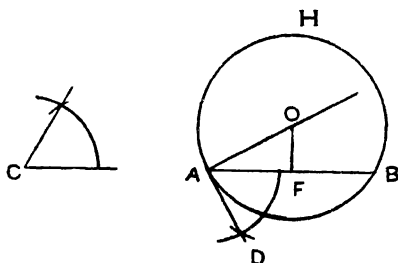
অঙ্কন করিয়া দেখাও যে, এরূপ দুইটি বৃত্ত আঁকা সম্ভব এবং তাহারা পরস্পর সমান।

১১। এরূপ এক বৃত্ত অঙ্কন কর যাহা এক নির্দিষ্ট সরল রেখাকে ও এক নির্দিষ্ট বৃত্তকে এক নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

১২। তিনটি সরল রেখা আছে, যাহাদের কোন দুইটি পরস্পর সমান্তরাল নহে। কিরূপে এরূপ এক বৃত্ত আঁকিবে যাহা ঐ তিনটি সরল রেখাকেই স্পর্শ করে। এরূপ কয়টি বৃত্ত আঁকা সম্ভব ?

৩০শ সম্পাদ্য (ইউক্লিড্ ৩।৩৩)

একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর, কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ ধারণক্ষম একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[On a given straight line to describe a segment of a circle which shall contain an angle equal to a given angle.]

AB একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা ও ∠C একটি নির্দিষ্ট কোণ। ABর উপর এমন একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার কোণগুলি ∠Cর সমান।

অঙ্কন : ABর A বিন্দুতে ∠Cর সমান করিয়া ∠BAD অঙ্কিত কর। A বিন্দুতে ADর উপর AO একটি লম্ব অঙ্কিত কর।

মনে কর, FO, ABর লম্ব-দ্বিখণ্ডক এবং উহা AOকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

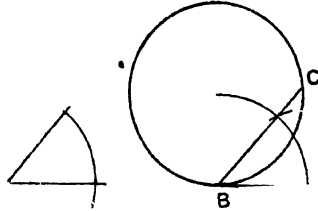
প্রমাণ : FOর উপরের সকল বিন্দুই A ও B হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

তাহা হইলে, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং OAকে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা B বিন্দু দিয়া যাইবে এবং ADকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। (উপঃ ৫৬)

আর AHB এই বৃত্তাংশে অবস্থিত কোণ ∠BAD বা ∠Cর সমান হইবে। (উপঃ ৫৯)

অনুশীলনী (৩২)

১। একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত হইতে এরূপ এক বৃত্তাংশ ছেদ কর যাহার কোণ কোন এক নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

[**সঙ্কেত :** BT স্পর্শক টান। B হইতে BC জ্যা টান, যেন ∠TBC = নির্দিষ্ট কোণ।]

২। একটি সমকোণবিশিষ্ট বৃত্তাংশ আঁক।

৩। একটি বৃত্তকে এমন দুইটি বৃত্তাংশে বিভক্ত কর, যেন একটির অন্তর্গত কোণ অপরটির অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হয়।

৪। একটি ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে; উহার শীর্ষ একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৫। ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট আছে; অধিকন্তু নিম্নলিখিত যে-কোন একটি অঙ্গ দেওয়া থাকিলে, প্রত্যেক ক্ষেত্রে ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর :—

(ক) অপর এক বাহু,

(খ) উচ্চতা,

(গ) ভূমির দ্বিখণ্ডক মধ্যমার দৈর্ঘ্য,

(ঘ) শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের পদ।

৬। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

৭। একটি ত্রিভুজের ভূমি, উন্নতি ও পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৮। কোন ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ এবং শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক সরল রেখা ভূমিকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহা দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

[**সঙ্কেত :** মনে কর AB ত্রিভুজটির ভূমি, P ও X যথাক্রমে নির্দিষ্ট বিন্দু ও নির্দিষ্ট কোণ। ABর উপর ঐ নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণবিশিষ্ট এক বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর। সম্পূর্ণ বৃত্তটি ADB চাপটি টানিয়া অঙ্কিত কর। D বিন্দুতে ADB চাপটি সমদ্বিখণ্ডিত কর। DP যোগ কর এবং ইহা বর্ধিত করিয়া পরিধিকে C বিন্দুতে ছেদ করাও। তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।]

৯। ভূমি, শিরঃকোণ এবং অন্য বাহু দুইটির সমষ্টি দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি আঁক।

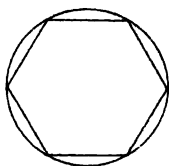
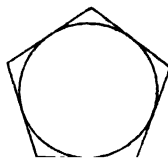
১০। ভূমি, শিরঃকোণ এবং অন্য বাহু দুইটির অন্তরফল দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি আঁক।

সংজ্ঞা

১। চারিটির অধিক বাহুবিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রকে **বহুভুজ** (Polygon) বলে।

২। একটি বহুভুজের সব কোণগুলি এবং বাহুগুলি সমান হইলে তাহাকে **সুষম** (Regular) **বহুভুজ** বলা হয়।

৩। একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের কোণগুলি একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত হইলে ক্ষেত্রটি বৃত্তে **অন্তর্লিখিত** (inscribed) হইয়াছে বলা হয়; এবং বৃত্তটির পরিধি ক্ষেত্রটির কোণগুলির উপর দিয়া অবস্থিত হইলে বৃত্তটি উক্ত ঋজুরেখ ক্ষেত্রে **পরিলিখিত** (circumscribed) হইয়াছে বলা হয়। পর পৃষ্ঠায় ১নং চিত্রে বৃত্তে অন্তর্লিখিত ষড়্ভুজের কিংবা ষড়্ভুজে পরিলিখিত বৃত্তের চিত্র প্রদর্শিত হইল।

৪। একটি বৃত্তের পরিধি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলি স্পর্শ করিলে বৃত্তটি অন্তর্লিখিত হইয়াছে বলা হয় এবং ক্ষেত্রটির বাহুগুলি বৃত্তটির স্পর্শক হইলে ক্ষেত্রটি পরিলিখিত হইয়াছে বলা হয়। নিম্নে ২নং চিত্রে পঞ্চভুজে অন্তর্লিখিত বৃত্তের চিত্র, কিংবা বৃত্তে পরিলিখিত পঞ্চভুজের চিত্র প্রদর্শিত হইল।

(১নং চিত্র) (২নং চিত্র)

অন্তর্লিখিত বৃত্তকে **অন্তর্বৃত্ত** (inscribed circle) এবং উহার কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে যথাক্রমে **অন্তঃকেন্দ্র** (in-centre) ও **অন্তর্ব্যাসার্ধ** (in-radius) বলে।

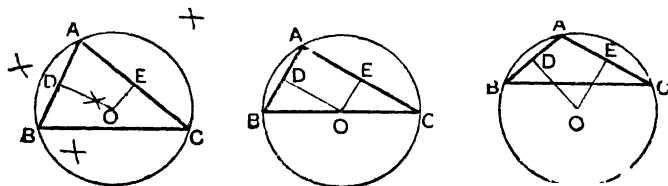
পরিলিখিত বৃত্তকে **পরিবৃত্ত** (circumscribed circle) এবং উহার কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে যথাক্রমে **পরিকেন্দ্র** (circum-centre) ও **পরিব্যাসার্ধ** (circum-radius) বলে।

৫। যে বৃত্ত কোন ত্রিভুজের বা ঋজুরেখ ক্ষেত্রের একটি বাহু ও অপর দুই বাহুর বর্ধিত অংশদ্বয়কে স্পর্শ করে, তাহাকে ত্রিভুজের একটি **বহির্বৃত্ত** (inscribed or ex-circle) বলে; এবং ইহার কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে যথাক্রমে একটি **বহিঃকেন্দ্র** (ex-centre) ও **বহির্ব্যাসার্ধ** (ex-radius) বলে।

মন্তব্য : ত্রিভুজের তিন দিকে তিনটি বহির্বৃত্ত হইতে পারে।

৩১শ সম্পাদ্য (ইউক্লিড্ ৪।৫)

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের একটি পরিবৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে

[To circumscribe a circle about a given triangle.

ABC ত্রিভুজের একটি পরিবৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : মনে কর, DO এবং EO যথাক্রমে AB এবং ACর লম্ব-দ্বিখণ্ডক এবং উহারা O বিন্দুতে মিলিল।

তাহা হইলে O বিন্দু উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র।

প্রমাণ : DOর সকল বিন্দুই A ও B বিন্দু হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

এবং EOর সকল বিন্দুই A ও C বিন্দু হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

অতএব উহাদের সাধারণ ছেদবিন্দু O, A, B এবং C হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

তাহা হইলে O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং OA, বা OB, বা OCকে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে তাহা A, B ও C বিন্দু দিয়া যাইবে। অতএব উক্ত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

দ্রষ্টব্য : ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী হইলে কেন্দ্রটি ত্রিভুজের মধ্যে হইবে, সমকোণী হইলে অতিভুজের উপর পড়িবে, এবং স্থূলকোণী হইলে ত্রিভুজের বাহিরে পড়িবে।

অনুসিদ্ধান্ত ১। কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু তিনটি হইতে উক্ত বাহু তিনটির উপর লম্ব অঙ্কিত করিলে লম্ব তিনটি সমবিন্দু হইবে, এবং উক্ত ছেদবিন্দুটি উক্ত ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র হইবে।

দ্রষ্টব্যঃ এক সরল রেখায় অবস্থিত নহে এইরূপ তিনটি বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা উপরের পদ্ধতি অনুসারেই হইতে পারে।

অনুসিদ্ধান্ত ২। প্রমাণ করিয়া দেখাও যে, তিনটি বিন্দু দিয়া মাত্র একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে।

[যদি দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারিত তাহা হইলে বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রবিন্দুর সংযোজক রেখা উক্ত বিন্দুদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের বাহু তিনটির মধ্য-বিন্দুতে লম্ব হইত ; ইহা অসম্ভব।]

অনুসিদ্ধান্ত ৩। প্রথম চিত্রে OF, BCর উপর লম্ব অঙ্কিত কর। এখন প্রমাণ কর যে,

(ক) A, D, O, E ,

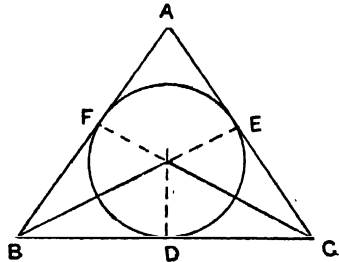
(খ) B, F, O, D

এবং (গ) C, E, O, F একবৃত্তস্থ।

দ্রষ্টব্য ঃ O বিন্দু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, OA, OB, OC পরস্পর সমান এবং উহারা প্রত্যেকে পরিব্যাসার্ধের সমান।

৩২শ সম্পাদ্য (ইউক্লিড ৪।৪)

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের একটি অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে

[To inscribe a circle in a triangle.]

ABC ত্রিভুজের একটি অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : ∠ABC ও ∠ACBকে BI ও CI দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। উহারা I বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল।

তাহা হইলে I বিন্দু উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র।

প্রমাণ : I বিন্দু হইতে ID, IE, IF যথাক্রমে BC, CA ও ABর উপর লম্ব অঙ্কিত কর।

BIএর উপরের সকল বিন্দু BC ও BA হইতে সমান দূরে অবস্থিত ;

$$\therefore \quad ID = IF \;;$$

এবং CIএর উপরের সকল বিন্দু CB ও CA হইতে সমান দূরে অবস্থিত ;

$$\therefore \quad ID = IE$$

$$\therefore \quad ID = IE = IF.$$

I বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ID বা IE বা IFকে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। তাহা হইলে উহা BC, CA ও ABকে, D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

∴ অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

অনুসিদ্ধান্ত ১। কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু এবং ঐ ছেদবিন্দু উক্ত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

অনুসিদ্ধান্ত ২। উপরের সম্পাদ্যের চিত্রে প্রমাণ কর যে,

(১) $\angle BIC = 90° + \angle\frac{A}{2}$

এবং (২) $\angle EDF = 90° - \angle\frac{A}{2}$.

প্রমাণ : (১) BIC ত্রিভুজের $\angle BIC + \angle\frac{B}{2} + \angle\frac{C}{2} = 2$ সমকোণ এবং ABC ত্রিভুজের $\angle A + \angle B + \angle C = 2$ সমকোণ

$$\therefore \angle BIC + \angle\frac{B}{2} + \angle\frac{C}{2} = \angle A + \angle B + \angle C.$$

অথবা, $\angle BIC = \angle A + \angle\frac{B}{2} + \angle\frac{C}{2}$

$$= 90° + \angle\frac{A}{2} \quad (\because \angle\frac{A}{2} + \angle\frac{B}{2} + \angle\frac{C}{2} = 90°)$$

(২) $\angle EDF = \angle\frac{EIF}{2}$

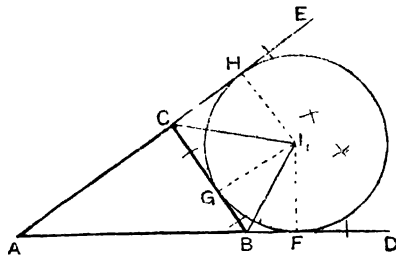
(যেহেতু $\angle E + \angle F = 2$ সমকোণ, সুতরাং A, E, I ও F সমবৃত্ত)

$\therefore \angle A + \angle EIF = 2$ সমকোণ ;

$$\therefore \angle EDF = \frac{\angle EIF}{2} = \tfrac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° - \angle\frac{A}{2}.$$

৩৩শ সম্পাদ্য

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে

[To draw an escribed circle of a given triangle.]

ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার AB ও AC বাহুকে D ও E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর।

এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা BD, BC ও CEকে স্পর্শ করে।

অঙ্কন : $\angle$DBC ও $\angle$BCEকে BI_1 ও CI_1 দিয়া সমদ্বিখণ্ডিত কর। উহারা I_1 বিন্দুতে মিশিল।

তাহা হইলে I_1, উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র।

প্রমাণ : I_1 বিন্দু হইতে I_1F, I_1G, I_1H যথাক্রমে BD, BC ও CEর উপর তিনটি লম্ব অঙ্কিত কর। BI_1 এর উপরের সকল বিন্দু BD ও BC হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

$$\therefore \quad I_1F = I_1G$$

একই রূপে, $I_1G = I_1H$

$$\therefore \quad I_1F = I_1G = I_1H.$$

তাহা হইলে, I_1 বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং I_1F বা I_1G বা I_1Hকে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে তাহা F, G এবং H বিন্দু দিয়া যাইবে এবং ঐ বিন্দুগুলিতে BD, BC এবং CEকে স্পর্শ করিবে ; কারণ I_1FB, I_1GC এবং I_1HE কোণ তিনটির প্রত্যেকে এক সমকোণ।

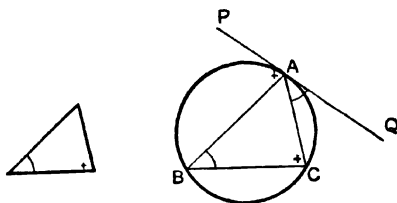
∴ অঙ্কিত বৃত্তটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের একটি বহির্বৃত্ত।

দ্রষ্টব্য : ত্রিভুজটির আরও দুই পার্শ্বে আরও দুইটি বহির্বৃত্ত হইবে।

অনু.। কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের বহিঃস্থ সমদ্বিখণ্ডক দুইটি এবং তৃতীয় কোণের অন্তঃস্থ সমদ্বিখণ্ডক সমবিন্দু, এবং উহাদের ছেদবিন্দু বহির্বৃত্তের কেন্দ্র।

৩৪শ সম্পাদ্য (ইউক্লিড, ৪।২)

একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যে এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার কোণগুলি একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের কোণগুলির সমান।

[In a given circle to inscribe a triangle equiangular to a given triangle.]

ABC নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং DEF নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

অঙ্কন : ⊙ABCর পরিধির উপর যে কোন একটি বিন্দু Aতে PAQ একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর।

A বিন্দুতে ∠PAB, ∠Fএর সমান করিয়া অঙ্কিত কর।

এবং ∠QAC, ∠Eর সমান করিয়া অঙ্কিত কর।

BC যোগ কর।

তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : PAQ একটি স্পর্শক, এবং AB সরল রেখা স্পর্শবিন্দু A হইতে একটি জ্যা।

∴ ∠PAB = একান্তর বৃত্তাংশে অবস্থিত ∠ACB.

কিন্তু $\angle PAB = \angle F$,

$\therefore \quad \angle ACB = \angle F$.

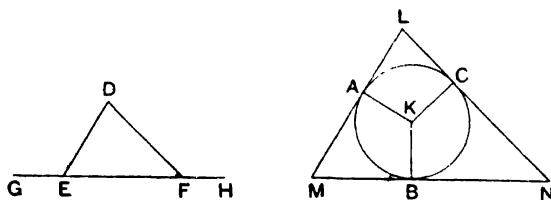
এইরূপে, $\angle ABC = \angle E$,

$\therefore$ তৃতীয় $\angle BAC =$ তৃতীয় $\angle D$.

$\therefore$ $\triangle ABC$র কোণগুলি $\triangle DEF$এর কোণগুলির সমান এবং $\triangle ABC$, $\odot ABC$র অন্তর্গত করিয়া অঙ্কিত হইয়াছে।

৩৫শ সম্পাদ্য (ইউক্লিড ৪।৩)

একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের চতুষ্পার্শ্বে এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার কোণগুলি একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের কোণগুলির সমান।

[About a given circle to circumscribe a triangle equiangular to a given triangle.]

ABC নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং DEF নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

অঙ্কন : EFকে উভয় দিকে G এবং H পর্যন্ত বর্ধিত কর।

ABCর কেন্দ্র K বাহির কর ;

এবং উহার যে-কোন একটি ব্যাসার্ধ KB অঙ্কিত কর।

K বিন্দুতে ∠BKA, ∠DEGর সমান করিয়া অঙ্কিত কর।

এবং ∠BKC, ∠DFHএর সমান করিয়া অঙ্কিত কর।

A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে LAM, MBN ও NCL তিনটি স্পর্শক অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে LMN উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : যেহেতু ∠KCN এবং ∠KBN প্রত্যেকে এক এক সমকোণ,

∴ B, K, C, N বিন্দুগুলি একই বৃত্তস্থ,

∴ $\angle BNC = \angle BKC$র সম্পূরক

$= \angle DFH$এর সম্পূরক

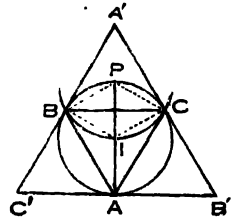
$= \angle DFE$.

একই রূপে, $\angle AMB = \angle DEF$;

∴ তৃতীয় $\angle ALC =$ তৃতীয় $\angle EDF$;

∴ $\triangle LMN$এর কোণগুলি $\triangle DEF$এর কোণগুলির সমান এবং $\triangle LMN$, ⊙ABCর চতুষ্পার্শ্বে অঙ্কিত হইয়াছে।

অনু. ১। কোন বৃত্তের (১) অন্তর্লিখিত, (২) পরিলিখিত একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

অঙ্কন : (১) I, বৃত্তটির কেন্দ্র, বৃত্তটির যে-কোন একটি ব্যাস AP লও। Pকে কেন্দ্র করিয়া PI ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা নির্দিষ্ট বৃত্তটিকে B ও Cতে ছেদ করিল।

AB, AC ও BC যোগ কর। এখন ABC সমবাহু ত্রিভুজটি অন্তর্লিখিত হইল।

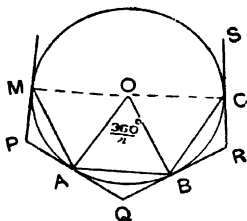
(২) A, B ও C বিন্দুতে বৃত্তের তিনটি স্পর্শক অঙ্কিত করিলে উহারা A′, B′, C′ ত্রিভুজটি উৎপন্ন করিল। ইহাই বৃত্তের পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ।

অনু. ২। কোন বৃত্তের (১) অন্তর্লিখিত, (২) পরিলিখিত একটি সুষম ষড়ভুজ অঙ্কিত কর।

[**সঙ্কেত** : উপরের চিত্রে PB উদ্দিষ্ট সুষম ষড়ভুজের একটি বাহু।]

৩৬শ সম্পাদ্য

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম বহুভুজ অন্তর্লিখিত বা পরিলিখিত করিতে হইবে।

[To draw a regular polygon in, or about, a given circle.]

ABC একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং O উহার কেন্দ্র। ইহাতে n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ অন্তর্লিখিত বা পরিলিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : পরিধির উপর যে-কোন একটি বিন্দু A লও এবং OA যোগ কর; O বিন্দুতে OB ব্যাসার্ধটি এরূপে অঙ্কিত কর, যাহাতে $\angle AOB$, $\frac{360^\circ}{n}$-এর সমান হয়। AB যোগ কর এবং ABর সমান করিয়া BC, AM ইত্যাদি জ্যাগুলি বৃত্তের উপর স্থাপন কর। তাহা হইলেই বৃত্তটিতে n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ অঙ্কিত হইবে।

এখন A, B, C ইত্যাদি বিন্দুগুলিতে PAQ, QBR, RCS ইত্যাদি স্পর্শকগুলি অঙ্কিত কর।

মনে কর স্পর্শকগুলি পরস্পর P, Q, R ইত্যাদি বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। তাহা হইলে PQR···, বৃত্তটির পরিলিখিত সুষম বহুভুজ।

প্রমাণ : যেহেতু $\angle AOB = \angle BOC$ ইত্যাদি,

$\therefore$ $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB$ ইত্যাদি ;

$\therefore$ $\angle MAB = \angle ABC$ ইত্যাদি।

এবং যেহেতু MA, AB, BC, ইত্যাদি পরস্পর সমান করিয়া অঙ্কিত হইয়াছে,

অতএব MABC··· সুষম।

আবার, যেহেতু $\angle AOB = \angle BOC$ ইত্যাদি,

অতএব উহাদের সম্পূরক কোণগুলি $\angle AQB$, $\angle BRC$ ইত্যাদি পরস্পর সমান।

যেহেতু, $\triangle AQB$, $\triangle BRC$ ইত্যাদি পরস্পর সর্বতোভাবে সমান,

$\therefore$ AQ = BR, QB = RC.

আবার, QA = QB, যেহেতু উভয়েই Q বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শক ;

এইরূপে RB = RC ইত্যাদি !

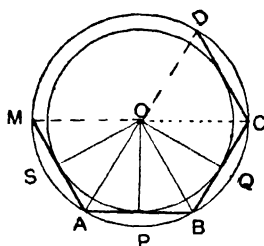
$\therefore$ AQ = QB = BR = RC ইত্যাদি ;

$\therefore$ PQ = QR ইত্যাদি ;

অতএব, PQR····সুষম।

৩৭শ সম্পাদ্য

একটি নির্দিষ্ট সুষম বহুভুজের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To draw a circle in, or about, a regular polygon.]

ABCD···M একটি নির্দিষ্ট সুষম বহুভুজ।

ইহার অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : ∠A ও ∠Bকে সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল ; দ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে মিশিল।

OC, OD,······OM যোগ কর।

এখন O হইতে AB, BC,······বাহুগুলির উপর যথাক্রমে OP, OQ,······লম্বগুলি অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং OPর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহা বহুভুজটির অন্তর্বৃত্ত হইবে এবং O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং OAর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে তাহা বহুভুজটির পরিবৃত্ত হইবে।

প্রমাণ : এখন, OBA, OBC ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

AB = BC, OB সাধারণ বাহু

এবং ∠OBA = ∠OBC ;

∴ OA = OC

এবং $\angle OCB = \angle OAB = \frac{1}{2}\angle MAB = \frac{1}{2}\angle BCD.$

তাহা হইলে, OC, $\angle BCD$র অন্তর্দ্বিখণ্ডক।

এইরূপে, সকল কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে মিশিবে।

আবার, যেহেতু, $\angle OAB = \angle OBA$

এবং $\angle OBC = \angle OCB$;

$\therefore$ $OA = OB = OC$, ইত্যাদি।

আবার যেহেতু AO, BO ইত্যাদি $\angle A$, $\angle B$ ইত্যাদির সমদ্বিখণ্ডক, অতএব, $OP = OQ$ ইত্যাদি।

সুতরাং O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং OPর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে তাহা বহুভুজটির বাহুগুলিকে P, Q ইত্যাদি বিন্দুতে স্পর্শ করিবে ; অতএব ইহাই উদ্দিষ্ট অন্তর্বৃত্ত।

এবং O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং OAর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে তাহা A, B, C ইত্যাদি বিন্দু দিয়া যাইবে ; অতএব ইহাই উদ্দিষ্ট পরিবৃত্ত।

৩৮শ সম্পাদ্য (ইউক্লিড্ ৪।১০)

এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ভূমিস্থ কোণ দুইটির প্রত্যেকে শিরঃকোণের দ্বিগুণ হয়।

[To draw an isosceles triangle having each of the angles at the base double of the vertical angle.]

অঙ্কন : AB একটি সরল রেখা লও এবং তাহাকে P বিন্দুতে এমন করিয়া ভাগ কর, যাহাতে $AB.\ BP = AP^2$.

Aকে কেন্দ্র করিয়া এবং ABকে ব্যাসার্ধ লইয়া ⊙ BCD অঙ্কিত কর, এবং ইহাতে APর সমান করিয়া BC জ্যাটি অঙ্কিত কর।

AC যোগ কর।

তাহা হইলে, ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : PC যোগ কর এবং A, P ও C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

যেহেতু, $AB.BP = AP^2 = BC^2$,

∴ BC, ⊙APCকে C বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে ;

∴ ∠BCP = একান্তর বৃত্তাংশে অবস্থিত ∠PAC.

উভয় পার্শ্বে ∠PCA যোগ কর ;

∴ ∠BCA = ∠PAC + ∠PCA

= বহিঃস্থ ∠CPB.

এবং যেহেতু, $AB = AC$,

∴ $\angle BCA = \angle CBA$;

∴ $\angle CBP = \angle CPB$;

∴ $CP = CB = AP$,

∴ $\angle PAC = \angle PCA$.

∴ $\angle PAC + \angle PCA = \angle A$র দ্বিগুণ ;

কিন্তু, $\angle ABC = \angle ACB = \angle PAC + \angle PCA$

$= \angle A$র দ্বিগুণ।

অনুশীলনী (৩৩)

১। একটি $18°$ কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[**সঙ্কেত :** ৩৮শ সম্পাদ্যে ABC ত্রিভুজের $\angle ABC = \angle ACB = 2\angle A = 72°$. এখন $\angle A$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে দুইটি $18°$ কোণ পাওয়া যাইবে।]

২। একটি সমকোণকে পাঁচ সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

(ক. প্র. ১৯০২, ১৯০৪)

[**সঙ্কেত :** ৩৮শ সম্পাদ্যের অনুরূপ $\angle ABC$ $(= 72°)$ অঙ্কিত কর। B বিন্দুতে BD লম্ব টান। তাহা হইলে $\angle ABD = 18°$. এখন $\angle ABC$র সমদ্বিখণ্ডক BE টান; আবার $\angle ABE$ ও $\angle EBC$কে সমদ্বিখণ্ডিত কর। তাহা হইলে $\angle BDC$ পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত হইল এবং উহাদের প্রত্যেকে $18°$র সমান হইল।]

৩। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম পঞ্চভুজ অঙ্কিত কর।

[**সঙ্কেত :** সুষম পঞ্চভুজের প্রত্যেক বাহু কেন্দ্রে $72°$ $(= 360° \div 5)$ কোণ উৎপন্ন করে।]

বৃত্তের পরিধি ও ক্ষেত্রফল

পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে, একটি বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য ব্যাসের দৈর্ঘ্যের $\frac{22}{7}$ গুণ; অর্থাৎ $\frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{\text{বৃত্তের ব্যাস}} = \pi$ (পাই) $= \frac{22}{7}$;

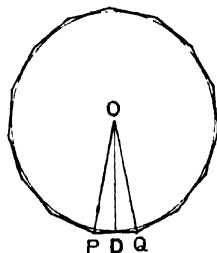
$\therefore$ পরিধি $= \pi \times$ ব্যাস $= 2\pi r$ ($r =$ ব্যাসার্ধ)$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(১)

মনে কর, O কোন বৃত্তের কেন্দ্র এবং উহার ব্যাসার্ধ r এবং এই বৃত্তে পরিলিখিত n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজের একটি বাহু PQ.

বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= n.\triangle POQ$

$= n.\frac{1}{2}.PQ.OD$

$= \frac{1}{2}.n.PQ.r$

$= \frac{1}{2}.$(বহুভুজের বাহুগুলির সমষ্টি)$.r$.

এখন বহুভুজের বাহুসংখ্যা যতই বৃদ্ধি করা যাইবে, ততই বহুভুজের পরিসীমা বৃত্তের পরিধির পরিমাণের সমান হইতে থাকিবে এবং বাহুসংখ্যা খুব বেশি লইলে, বহুভুজের পরিসীমা ও বৃত্তের পরিধির বিয়োগফল অত্যন্ত অল্প হইবে এবং তাহা উপেক্ষা করা যাইতে পারে। কাজেই তখন বহুভুজের পরিসীমা ও বৃত্তের পরিধি সমান ধরা যাইতে পারে। সুতরাং তখন বহুভুজ ও বৃত্তের ক্ষেত্রফলও সমান বলিয়া ধরা যায়।

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$(পরিসীমা)$.r$

$= \frac{1}{2}$(পরিধি)$.r$

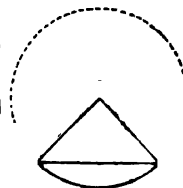
$= .\frac{1}{2}2\pi r.r\cdots\cdots$(১) হইতে

$= \pi r.^2$

বৃত্তকলার ও বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল

কোন বৃত্তের যে-কোন দুইটি ব্যাসার্ধের অন্তর্গত কোণ 1° হইলে তাহাদের দ্বারা (১) ছিন্ন চাপের দৈর্ঘ্য = পরিধির $\frac{1}{360}$ অংশ ;

(২) ছিন্ন বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল = বৃত্তের $\frac{1}{360}$ অংশ।

$\therefore$ $\angle POQ$এর পরিমাণ B° হইলে

(১) PQ চাপ $= \frac{B}{360} \times$ পরিধি ;

(২) POQ বৃত্তকলা $= \frac{B}{360} \times$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \frac{B}{360} \times \frac{1}{2}$ পরিধি $\times$ ব্যাসার্ধ

$= \frac{1}{2}$PQ চাপ $\times$ ব্যাসার্ধ।

PQD উপচাপের ক্ষেত্রফল = OPDQ বৃত্তকলা $- \triangle POQ$.

অধিচাপের ক্ষেত্রফল বাহির করা আবশ্যক হইলে বৃত্তের ক্ষেত্রফল হইতে অনুরূপ উপচাপের ক্ষেত্রফল বাদ দিতে হইবে।

অনুশীলনী (৩৪)

[বিবিধ]

১। কোন বৃত্তে পরিলিখিত করিয়া একটি রম্বস্ অঙ্কিত কর।

২। কোন বৃত্তে একটি বর্গক্ষেত্র অন্তর্লিখিত কর।

[**সঙ্কেত :** পরস্পর লম্বভাবে দুইটি ব্যাস টানিয়া উহাদের প্রান্ত-বিন্দুগুলি যোগ কর।]

৩। কোন বৃত্তে একটি বর্গক্ষেত্র পরিলিখিত কর।

[**সঙ্কেত :** পরস্পর লম্বভাবে দুইটি ব্যাস টানিয়া, উহাদের প্রান্ত-বিন্দুগুলিতে স্পর্শক টান।]

৪। কোন বৃত্তের (ক) অন্তর্লিখিত, (খ) পরিলিখিত একটি সুষম ষড়্ভুজ অঙ্কিত কর।

প্রমাণ কর যে, সুষম ষড়্ভুজের একান্তর কোণগুলি সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তাহার ক্ষেত্রফল ষড়্ভুজের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

৫। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি সুষম অষ্টভুজ অঙ্কিত কর।

[**সঙ্কেত :** কেন্দ্র হইতে পরস্পর লম্ব দুইটি ব্যাসার্ধ লও এবং উহাদের অন্তর্গত সমকোণকে দ্বিখণ্ড করিয়া আর একটি ব্যাসার্ধ লইয়া, ঐ ব্যাসার্ধগুলি পরিধিতে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদিগকে যোগ কর ইত্যাদি]

৬। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্লিখিত এবং পরিলিখিত করিয়া দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী এবং প্রথমটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{4}$ দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রফল।

৭। কোন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র-সংযোজক সরল রেখা উহার একটি শীর্ষবিন্দু দিয়া গেলে, দেখাও যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

৮। কোন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র পরস্পর সমাপতিত হইলে, ত্রিভুজটি সমবাহু।

৯। যে সকল ত্রিভুজের (১) ভূমি সমান ও (২) শীর্ষকোণ সমান তাহাদের পরিবৃত্তও সমান।

১০। কোন বৃত্তের এইরূপ এক অন্তর্লিখিত ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহা এক নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশকোণী হয়।

[**সঙ্কেত:** বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দুতে এক স্পর্শক টানিয়া, স্পর্শক বা ত্রিভুজের কোণের সহিত যে দুই কোণ উৎপন্ন করিবে তাহাদিগকে নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ভূমির কোণের সমান কর।]

১১। কোন বৃত্তের এইরূপ এক পরিলিখিত ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহা এক নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশকোণ হয়।

১২। বৃত্তের অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল উহার পরিলিখিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

১৩। কোন বর্গক্ষেত্রের অন্তর্লিখিত এরূপ এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার একটি শীর্ষ বর্গক্ষেত্রের কোন শীর্ষে থাকিবে।

১৪। কোন বর্গক্ষেত্রের অন্তর্লিখিত এরূপ এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার একটি শীর্ষ বর্গক্ষেত্রের কোন বাহুর মধ্যবিন্দুতে থাকিবে।

১৫। একটি বর্গক্ষেত্র এবং একটি সমবাহু ত্রিভুজ একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত থাকিলে এবং তাহাদের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে, a ও b হইলে, দেখাও যে $3a^2 = 2b^2$.

১৬। একটি সুষম ষড়ভুজ এবং একটি সমবাহু ত্রিভুজ কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত থাকিলে এবং তাহাদের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a ও b হইলে, দেখাও যে, $a^2 = 3b^2$.

১৭। $\triangle ABC$র অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$. প্রমাণ কর যে

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}(a+b+c)r.$$

১৮। কোন বৃত্তের পরিলিখিত ও অন্তর্লিখিত করিয়া দুইটি সুষম ষড়ভুজ অঙ্কিত থাকিলে, দেখাও যে প্রথমটির ক্ষেত্রফলের তিন গুণ = দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রফলের চারি গুণ।

১৯। কোন নির্দিষ্ট AB রেখার উপর এক সুষম ষড়ভুজ অঙ্কিত কর।

[**সঙ্কেত :** Aকে কেন্দ্র করিয়া, ABকে ব্যাসার্ধ লইয়া এবং Bকে কেন্দ্র করিয়া ও ABকে ব্যাসার্ধ লইয়া, দুইটি অঙ্কিত বৃত্ত, ধর যেন, কোন বিন্দু Oতে ছেদ করিল। Oকে কেন্দ্র করিয়া OA (বা OB) ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক ইত্যাদি।]

২০। কোন নির্দিষ্ট AB সরল রেখার উপর একটি সুষম অষ্টভুজ অঙ্কিত কর।

[**সঙ্কেত :** ABকে C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। CO, ABর উপর লম্ব টান। CO হইতে CD = AC, এবং DO হইতে DE = AD কাট। এখন $\angle AEB = 45^\circ$; সুতরাং Eকে কেন্দ্র করিয়া EA ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত আঁকিলে এবং উহাতে B হইতে ABর সমান জ্যা পর পর স্থাপন করিয়া গেলে নির্ণেয় অষ্টভুজ পাইতে পারিবে।]

২১। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা, পরস্পর অসমান্তরাল এবং এক বিন্দুতে ছেদ করে না, এরূপ তিন সরল রেখা স্পর্শ করিয়াছে।

২২। কোন অর্ধবৃত্তের অন্তর্লিখিত করিয়া একটি বৃত্ত আঁক।

২৩। কোন বৃত্তকলার অন্তর্লিখিত করিয়া একটি বৃত্ত আঁক।

[**সঙ্কেত :** চাপের মধ্যবিন্দুতে স্পর্শক আঁক। উহাকে প্রান্তে অবস্থিত ব্যাসার্ধদ্বয় পর্যন্ত বর্ধিত কর ইত্যাদি।]

২৪। নির্দিষ্ট কেন্দ্রযুক্ত একটি বৃত্ত এরূপে অঙ্কন কর যেন তাহা একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করে।

২৫। নির্দিষ্ট কেন্দ্রযুক্ত এক বৃত্ত এরূপে অঙ্কন কর যেন তাহা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে।

২৬। একটি বৃত্ত এরূপে অঙ্কন কর যেন তাহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় এবং তাহার কেন্দ্র একটি সরল রেখায় থাকে।

[**সঙ্কেত :** বিন্দুদ্বয়ের লম্ব-দ্বিখণ্ডক এবং নির্দিষ্ট রেখা যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহা নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।]

২৭। একটি বৃত্ত এরূপে অঙ্কন কর যেন, তাহা এক নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় এবং তাহা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এক নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

২৮। একটি বৃত্তের ব্যাস নির্দিষ্ট আছে ; বৃত্তটিকে এরূপ ভাবে অঙ্কন কর যেন,

(ক) তাহা দুইটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করে ;

(খ) তাহা একটি সরল রেখাকে এক নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে ;

(গ) তাহা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় এবং একটি নির্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করে।

২৯। কোন বৃত্তের স্পর্শক জ্যার দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট আছে ; বৃত্তটিকে এরূপ ভাবে আঁক যেন তাহা দুইটি নির্দিষ্ট সরল রেখা স্পর্শ করিয়া যায়।

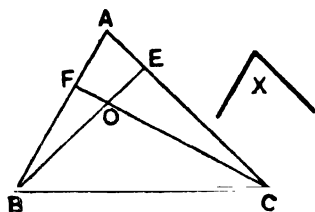
৩০। এরূপ একটি বৃত্ত আঁক যাহা এক নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের একটি শীর্ষ দিয়া যায় এবং উহার দুই বাহু স্পর্শ করে।

৩১। পরস্পরচ্ছেদী তিনটি অসীম সরল রেখা আছে। উহাদের স্পর্শক করিয়া চারিটি বৃত্ত আঁক।

পঞ্চম অধ্যায়

সঞ্চারপথ সম্বন্ধীয় বিবিধ প্রতিজ্ঞা

১। কোন ত্রিভুজের ভূমি এবং শিরঃকোণ নির্দিষ্ট আছে; উহার লম্ববিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

[Given the base and the vertical angle of any triangle, to find the locus of its orthocentre.]

মনে কর, BC নির্দিষ্ট ভূমি এবং ∠X নির্দিষ্ট কোণ।

ABC ত্রিভুজটি BC ভূমির উপর এমন ভাবে অঙ্কিত কর, যাহাতে শিরঃ∠A, ∠Xএর সমান হয়।

BE ও CF লম্ব দুইটি অঙ্কিত কর, উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন O লম্ববিন্দু।

O বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রমাণ: যেহেতু, ∠OFA ও ∠OEA প্রত্যেকে এক সমকোণ,

∴ O, F, A, E বিন্দুগুলি এক বৃত্তস্থ;

∴ ∠FOE, ∠Aর সম্পূরক;

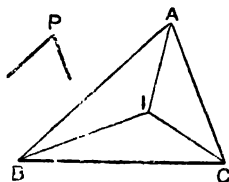
∴ বিপ্রতীপ ∠BOC, ∠Aর সম্পূরক।

কিন্তু ∠A একটি স্থির কোণ, যেহেতু, উহা ∠Xএর সমান।

অতএব, উহার সম্পূরক কোণও স্থির কোণ।

অতএব, O বিন্দুর সঞ্চারপথ BCর উপর একটি বৃত্তাংশের চাপের উপর অবস্থিত এবং উক্ত বৃত্তাংশের কোণ ∠Xএর সম্পূরক কোণের সমান।

২। কোন ত্রিভুজের ভূমি এবং শিরঃকোণ নির্দিষ্ট আছে; উহার অন্তঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

[Given the base and the vertical angle of any triangle, to find the locus of its in-centre.]

মনে কর, BC নির্দিষ্ট ভূমি এবং ∠P নির্দিষ্ট কোণ। ABC ত্রিভুজটি BC ভূমির উপর এমন ভাবে অঙ্কিত কর, যাহাতে শিরঃ∠A ∠Pর সমান হয়।

AI, BI, CI দিয়া ∠A, ∠B ও ∠Cকে সমদ্বিখণ্ডিত কর; তাহা হইলে, I অন্তঃকেন্দ্র।

I বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রমাণ : △BIC হইতে,

$\angle BIC + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C =$ দুই সমকোণ ;.........(১)

এবং △ABC হইতে,

$\angle A + \angle B + \angle C =$ দুই সমকোণ।

অতএব, $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C =$ এক সমকোণ ; ...(২)

(১) হইতে (২) বিয়োগ কর,

∴ $\angle BIC - \frac{1}{2}\angle A =$ এক সমকোণ,

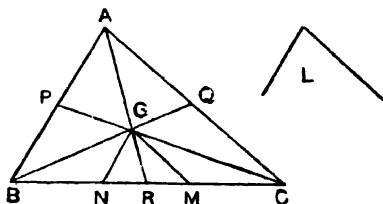
∴ $\angle BIC =$ এক সমকোণ $+ \frac{1}{2}\angle A$.

কিন্তু, $\angle A$ স্থির কোণ, যেহেতু $\angle A = \angle P$.

$\therefore$ $\angle BIC$ স্থির কোণ।

অতএব, I বিন্দুর সঞ্চারপথ BC ভূমির উপর এক সমকোণ $+\frac{1}{2}\angle A$ ধারণক্ষম একটি বৃত্তাংশের চাপের উপর অবস্থিত।

৩। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শীর্ষকোণ নির্দিষ্ট আছে; উহার ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

[Given the base and the vertical angle of any triangle, to find the locus of the centroid of the triangle.]

মনে কর, BAC ত্রিভুজের BC নির্দিষ্ট ভূমি এবং ইহার শীর্ষকোণ $\angle A =$ নির্দিষ্ট $\angle L$.

AR, BQ ও CP মধ্যমা তিনটি G বিন্দুতে ছেদ করিল। G বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

G বিন্দু দিয়া AB, ACর সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে GN ও GM অঙ্কিত কর। উহারা BCকে যথাক্রমে N ও M বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ: যেহেতু, $GP = \frac{1}{3}CP$, এবং GN, PB সমান্তরাল,

$\therefore \quad BN = \frac{1}{3}BC.$

এইরূপে, $CM = \frac{1}{3}BC.$

$\therefore$ N ও M বিন্দু দুইটি BCর অন্তর্গত দুইটি ধ্রুব বিন্দু।

এখন, যেহেতু GN, ABর সমান্তরাল এবং GM, ACর সমান্তরাল,

∴ $\angle NGM = \angle BAC = \angle L$;

∴ $\angle NGM$ একটি ধ্রুব কোণ ;

∴ NMএর উপর অঙ্কিত এবং $\angle L$এর সমান কোণবিশিষ্ট একটি চাপই G বিন্দুর সঞ্চারপথ।

অনুশীলনী (৩৫)

১। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শীর্ষকোণ নির্দিষ্ট আছে। উহার ভূমি-সংলগ্ন বহির্বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শীর্ষকোণ নির্দিষ্ট আছে। উহার ভূমি ভিন্ন অন্য যে-কোন বাহু-স্পর্শকারী বহির্বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শীর্ষকোণ নির্দিষ্ট আছে। উহার ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের এবং অন্তঃকেন্দ্রের মধ্যগামী বৃত্তটির কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শীর্ষকোণ নির্দিষ্ট আছে। শীর্ষবিন্দু হইতে অঙ্কিত মধ্যমার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৫। কোন ত্রিভুজ একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর অবস্থিত এবং উহার ভূমিস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান; ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৬। কোন সামান্তরিকের একটি বাহু নির্দিষ্ট আছে। তৎসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৭। কোন ত্রিভুজের ভূমি এবং ভূমিস্থ কোণের সমষ্টি নির্দিষ্ট আছে। উহার অন্তঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৮। এককেন্দ্রীয় বৃত্তসমূহে বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকসমূহের স্পর্শবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৯। কোন বৃত্তের বহিঃস্থ এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তের যে সকল জ্যা অঙ্কিত করা যায়, তাহাদের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[উহা অপর একটি বৃত্ত হইবে এবং তাহা নির্দিষ্ট বৃত্তকে ছেদ করিবে।]

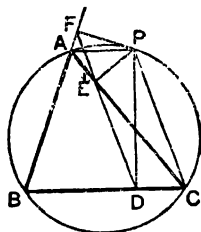
১০। কোন বৃত্তে AB একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট জ্যা। ABর উপর একটি বিন্দু নির্দিষ্ট আছে। উহার সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১১। $\triangle BAC$ কোন এক নির্দিষ্ট ভূমি BCর উপর অঙ্কিত। উহার শীর্ষকোণ নির্দিষ্ট। BPকে P পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হইল যে, $BP = BA + AC$; P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১২। একটি নির্দিষ্ট কোণের বাহুদ্বয়ের উপর একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যযুক্ত সরল রেখার প্রান্তদ্বয় অবস্থিত আছে। প্রমাণ কর যে, উৎপন্ন ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দুর সঞ্চারপথ প্রত্যেকে একটি বৃত্ত হইবে।

সিমসন রেখা (Simson's line)

কোন ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপরস্থ যে-কোন বিন্দু হইতে ত্রিভুজটির তিনটি বাহুর উপর তিনটি লম্ব অঙ্কিত করিলে লম্বগুলির পাদবিন্দুগুলি একরেখীয় হইবে।

[The feet of the perpendiculars drawn to the three sides of a triangle from any point on its circum-circle are collinear.]

মনে কর, △ABCর পরিবৃত্তের উপর P একটি বিন্দু এবং P বিন্দু হইতে বাহুগুলির উপর (আবশ্যক ক্ষেত্রে বর্ধিত করিয়া) PD, PE ও PF লম্বগুলি অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, D, E, F বিন্দুগুলি একরেখীয়।

FE ও ED যোগ কর ;

তাহা হইলে FE ও ED একরেখীয় প্রমাণ করিতে হইবে।

PA ও PC যোগ কর।

প্রমাণ যেহেতু ∠PEA, ∠PFA প্রত্যেকে এক সমকোণ ;

∴ P, E, A, F বিন্দুগুলি এক বৃত্তস্থ ;

∴ ∠PEF = একই বৃত্তাংশস্থ ∠PAF

= ∠PABর সম্পূরক

= ∠PCD,

(যেহেতু A, P, C, B বিন্দুগুলি এক বৃত্তস্থ)

আবার, যেহেতু ∠PEC ও ∠PDC প্রত্যেকে এক সমকোণ,

∴ P, E, D, C বিন্দুগুলি এক বৃত্তস্থ ;

∴ ∠PED = ∠PCDর সম্পূরক

= ∠PEFএর সম্পূরক ;

∴ FE ও ED এক রেখায় অবস্থিত।

সংজ্ঞা। FED সরল রেখাটিকে P বিন্দু হইতে ABC ত্রিভুজের **পাদরেখা** (Pedal line) বা **সিমসন রেখা** বলা হয়।

অনুশীলনী (৩৬)

১। কোন বিন্দু হইতে একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের উপর লম্ব অঙ্কিত করিলে যদি পাদগুলি একরেখীয় হয়, তাহা হইলে ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। (উদাহরণটি সিমসন রেখার বিপরীত প্রতিজ্ঞা। নির্ণেয় সঞ্চার-পথটি উক্ত ত্রিভুজের পরিবৃত্ত।)

২। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কোন এক P বিন্দু হইতে BC, CAর উপর PL ও PM লম্ব টান। LM বর্ধিত হইলে যদি ABর অথবা উহার বর্ধিতাংশের) সহিত L বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, PN, ABর উপর লম্ব।

৩। P ও Q △ABCর পরিবৃত্তের দুইটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, P ও Qএর সিমসন রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, PQ চাপের উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থ কোণের সমান।

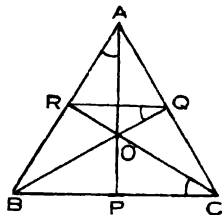
৪। কোন বৃত্তে একটি ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত হইল; পরিধির কোন বিন্দু Pর সহিত ত্রিভুজটির লম্ববিন্দুর সংযোগ করা হইল; প্রমাণ কর যে, এই রেখাটি P বিন্দুর সিমসন রেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করা হইয়াছে।

৫। ABC △এর পরিবৃত্তে P বিন্দু হইতে BC বাহুর উপর PL লম্ব টানা হইল। উহাকে বর্ধিত করিয়া পরিবৃত্তের সহিত Q বিন্দুতে মিলিত করিলে AC, Pর পাদরেখার সমান্তরাল হইবে।

পাদ-ত্রিভুজ

একটি ত্রিভুজের শীর্ষকোণগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর তিনটি লম্ব অঙ্কিত করিলে তাহারা সমবিন্দু হইবে।

[The perpendiculars to the sides of a triangle from the opposite vertices are concurrent.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজে BQ, CR যথাক্রমে CA, AB বাহুদ্বয়ের উপর লম্ব, এবং উহারা O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। AO যুক্ত কর এবং উহাকে বর্ধিত করিয়া BC, বাহুর P বিন্দুতে মিলিত কর।

এখন প্রমাণ করিতে হইবে যে, AP, BC বাহুর উপর লম্ব।

RQ যোগ কর।

প্রমাণ ঃ $\angle$ORA = এক সমকোণ, $\angle$OQA = এক সমকোণ ;

$\therefore$ $\angle$ORA, $\angle$OQAএর সম্পূরক

$\therefore$ AROQ একই বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore$ $\angle$RAO = $\angle$RQO (একই বৃত্তাংশে অবস্থিত বলিয়া)...(i)

আবার, $\angle$BRC = $\angle$BQC, কারণ উহাদের প্রত্যেকেই এক সমকোণ।

$\therefore$ B, R, Q, C সমবৃত্ত।

$\therefore$ $\angle$RCB = $\angle$RQB (একই বৃত্তাংশে অবস্থিত বলিয়া)...(ii)

(i) ও (ii) হইতে, $\angle$RAO বা $\angle$BAP = $\angle$RQO = $\angle$RCB.

এখন $\triangle$BAP ও $\triangle$BCRএর মধ্যে,

B বিন্দুতে অবস্থিত কোণটি সাধারণ কোণ,

$\angle$BAP = $\angle$RCB ;

$\therefore$ ঐ ত্রিভুজ দুইটির অবশিষ্ট কোণদ্বয় APB, BRC পরস্পর সমান ;

যেহেতু $\angle BRC$ = এক সমকোণ,

$\therefore$ $\angle APB$ও এক সমকোণের সমান ;

সুতরাং AP, BC বাহুর উপর লম্ব।

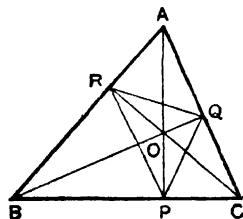
অতএব, প্রমাণিত হইল, AP, BQ, CR সমবিন্দু।

সংজ্ঞা। ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্ব অঙ্কিত করিলে উহারা যে বিন্দুতে ছেদ করে, তাহাকে **লম্ববিন্দু** (orthocentre) কহে। এই লম্বগুলির পাদবিন্দুগুলি যোগ করিলে যে ত্রিভুজটি হয় তাহাকে **পাদ-ত্রিভুজ** (pedal or orthocentric triangle) বলে।

পাদ-ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় কয়েকটি প্রতিজ্ঞা

১। কোন সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বগুলি, পাদ-ত্রিভুজের কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[The perpendiculars to the sides of an acute angled triangle from the opposite vertices bisect the angles of the pedal triangle.]

মনে কর ABC ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলি AP, BQ, CR পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে $\triangle PQR$, $\triangle ABC$র পাদ-ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AP, BQ, CR যথাক্রমে $\angle RPQ$, $\angle RQP$, $\angle PRQ$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ : O, P, C, Q বিন্দুগুলি এক বৃত্তস্থ ;

$\therefore$ $\angle OPQ$ = এক বৃত্তস্থ $\angle OCQ$.

আবার, O, P, B, R বিন্দুগুলি এক বৃত্তস্থ ;

∴ $\angle OPR =$ এক বৃত্তস্থ $\angle OBR$

কিন্তু, $\angle RCA = \angle QBA$ [প্রত্যেকেই $\angle BAC$র পূরক]

∴ $\angle OPQ = \angle OPR$

অর্থাৎ, AP, $\angle APQ$কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

এইরূপে BQ ও CR যথাক্রমে $\angle RQP$ ও $\angle QRP$কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অনুসিদ্ধান্ত ১। পাদ-ত্রিভুজের কোন দুইটি বাহু মূল ত্রিভুজের যে বাহুর উপর মিলিত হয়, সেই বাহুর সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

$$\angle APC - \angle OPQ = \angle APB - \angle OPR.$$

$$[\because \angle OPQ = \angle OPR]$$

$$\therefore \angle RPB = \angle QPC.$$

অনুসিদ্ধান্ত ২। $\triangle ABC$, $\triangle PQC$, $\triangle AQR$ এবং $\triangle PBR$ সদৃশকোণী।

২। ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইতে উহার প্রত্যেক শীর্ষবিন্দুর দূরত্ব, বিপরীত বাহু হইতে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রের দূরত্বের দ্বিগুণ।

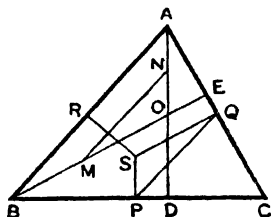
[The distance of each of the vertices of a triangle from the orthocentre is double the distance of the circum-centre from the opposite side.]

ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O এবং পরিকেন্দ্র S.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$AO = 2SP$;

$BO = 2SQ$;

$CO = 2SR$.

N ও M যথাক্রমে AO ও BOর মধ্যবিন্দু। PQ, MN যোগ কর।

প্রমাণ : PQ, AB রেখার সমান্তরাল এবং অর্ধেক।

সেইরূপ, MN, AB রেখার সমান্তরাল এবং অর্ধেক।

$\therefore$ PQ, MNএর সমান্তরাল এবং সমান।

এখন, MN, AD ও BE যথাক্রমে PQ, SP ও SQ এর সমান্তরাল ;

$\therefore$ $\angle MNO = \angle SPQ$ এবং $\angle NMO = \angle SQP$.

এখন, NOM ও SPQ এই দুইটি ত্রিভুজে,

$\angle MNO = \angle SPQ$, $\angle NMO = \angle SQP$

এবং $MN = PQ$;

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

$\therefore$ $NO = SP$ এবং $MO = SQ$;

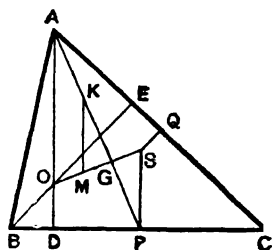
$\therefore$ $AO = 2NO = 2SP$, এবং $BO = 2MO = 2SQ$.

সেইরূপ, $CO = 2SR$.

মন্তব্য : কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু জানা থাকিলে এই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে সহজেই ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র নির্ণয় করা যায়।

৩। ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র, এবং লম্ববিন্দু এক-রেখীয়।

[The circum-centre, centroid and orthocentre of any triangle lie in the same straight line.]

S এবং O যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। P, BC বাহুর মধ্যবিন্দু। SP, SO, AP সংযুক্ত কর। AP, SOকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। মনে কর K ও M যথাক্রমে AG ও OGর মধ্যবিন্দু। MK সংযুক্ত কর।

এখন KM, AOর সমান্তরাল এবং অর্ধেক ;

সুতরাং, KM, SPর সমান ও সমান্তরাল ;

$\therefore$ KMPS চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

যেহেতু, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

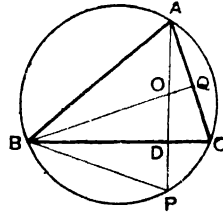
$\therefore$ $PG = GK = \frac{1}{2}AG$;

সুতরাং, G, $\triangle ABC$র ভরকেন্দ্র এবং ইহা SO রেখায় অবস্থিত ;

অতএব, ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু একরেখীয়।

৪। O, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু। AO সংযুক্ত করিয়া বর্ধিত করিলে উহা BC ও পরিবৃত্তকে যথাক্রমে D ও P বিন্দুতে ছেদ করিল,

প্রমাণ কর যে, OD = DP.

BP ও BO সংযুক্ত কর।

BOকে বর্ধিত করিয়া ACর সহিত Q বিন্দুতে মিশাইয়া দাও।

প্রমাণ : $\angle ODC = \angle OQC =$ এক সমকোণ,

$\therefore$ ODCQ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore$ বহিঃস্থ $\angle BOD =$ অন্তঃস্থ বিপরীত $\angle QCD$ অর্থাৎ $\angle ACB$

কিন্তু, $\angle ACB = \angle APB$ (উভয়ে একই বৃত্তস্থ বলিয়া)

$\therefore$ $\angle BOD = \angle BPD$.

এখন, BDO ও BPD এই দুইটি সমকোণী ত্রিভুজে,

$\angle BOD = \angle BPD$ এবং BD সাধারণ বাহু ;

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

$\therefore$ OD = DP.

অনুশীলনী (৩৭)

১। কোন ত্রিভুজের ভূমি উহার লম্ববিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে, উহা শীর্ষকোণের সম্পূরক হইবে।

২। O, △ABCর লম্ববিন্দু। প্রমাণ কর যে, O, A, B, C এই বিন্দু চারিটির যে-কোন একটি, অবশিষ্ট তিনটি বিন্দু দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইবে।

৩। সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের বাহু তিনটি উহার পাদ-ত্রিভুজের বহিঃকোণ তিনটির সমদ্বিখণ্ডক হইবে। আর স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূল কোণ উৎপন্নকারী বাহু দুইটি পাদ-ত্রিভুজের অনুরূপ অন্তঃকোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডক হইবে।

৪। △DEF, ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পাদ-ত্রিভুজ। প্রমাণ কর যে, DEF পাদ-ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে 2A, 2B, 2C কোণগুলির সম্পূরক।

৫। ত্রিভুজের দুই শীর্ষ এবং লম্ববিন্দু দিয়া তিনটি বৃত্ত আঁকিলে, উহারা প্রত্যেকে ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমান হইবে।

৬। O, △ABCর অন্তঃকেন্দ্র হইলে এবং AO, BO, CO বর্ধিত হইয়া পরিবৃত্তের সহিত যথাক্রমে P, Q, R বিন্দুতে মিলিত হইল। দেখাও যে O, PQR ত্রিভুজের লম্ববিন্দু।

৭। △ABCর O লম্ববিন্দু। AOকে ABC পরিবৃত্ত অবধি বর্ধিত কর, যেন উহা BCকে D বিন্দুতে এবং উক্ত পরিধিকে X বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, BO = BX ; DO = DX

৮। কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু এবং যে-কোন দুইটি কৌণিক বিন্দুর মধ্য দিয়া তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া উহাদের কেন্দ্রগুলিকে পরস্পর সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজটি পাওয়া যায়, তাহা মূল ত্রিভুজটির সহিত সর্বসম হইবে।

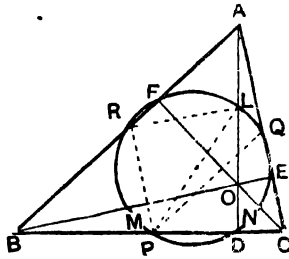
৯। কোন ত্রিভুজের এক শীর্ষ, পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১০। কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু, পরিকেন্দ্র এবং ভূমির মধ্যবিন্দু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১১। O, ABCর লম্ববিন্দু, S পরিকেন্দ্র এবং AD, BCর উপর লম্ব। AS ও AD বর্ধিত করায় পরিবৃত্তকে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর, GH, BC ॥ এবং BGCO একটি সামান্তরিক।

নব-বিন্দু-বৃত্ত

কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু তিনটি, শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলির পাদবিন্দু তিনটি, এবং শীর্ষ ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাগুলির মধ্যবিন্দু তিনটি, এই নয়টি বিন্দু একবৃত্তস্থ।

[In any triangle, the middle points of the sides, the feet of the perpendiculars from the vertices to the opposite sides and the middle points of the l: s joining the orthocentre to the vertices are concyclic.

মনে কর, ABC ত্রিভুজে, P, Q, R, যথাক্রমে BC, CA ও ABর মধ্যবিন্দু; D, E, F, ঐ বাহুগুলির উপর A, B ও C হইতে লম্বগুলির পাদবিন্দু, O লম্ববিন্দু এবং L, M, N, যথাক্রমে OA, OB এবং OCর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, P, Q, R, D, E, F, L, M, N, এই নয়টি বিন্দু একবৃত্তের উপর অবস্থিত।

প্রমাণ: PQ, PR, PL, QL, RL যোগ কর।

এখন, $\triangle$ABOতে,

যেহেতু, AR = RB, এবং AL = LO ;

$\therefore$ RL, BOর সমান্তরাল।

ABC ত্রিভুজে, BR = RA এবং BP = PC ;

∴ RP, ACর সমান্তরাল।

কিন্তু, BOকে বর্ধিত করিলে ACর উপর লম্ব হয়,

∴ ∠PRL = এক সমকোণ।

একই রূপে, ∠PQL = এক সমকোণ ;

∴ P, Q, L, R বিন্দুগুলি এক বৃত্তস্থ।

অর্থাৎ, P, Q, R বিন্দু দিয়া যে বৃত্ত অবস্থিত তাহার পরিধির উপর L অবস্থান করে এবং PL ঐ বৃত্তের ব্যাস।

একই রূপে দেখান যায় যে M ও N ঐ বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত।

আবার, যেহেতু ∠LDP = এক সমকোণ,

অতএব, PL ব্যাসের উপর অঙ্কিত বৃত্ত D বিন্দু দিয়া যাইবে।

একই রূপে প্রমাণ করা যায় যে, E ও F ঐ বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত।

∴ P, Q, R, D, E, F, L, M, N বিন্দু নয়টি একই বৃত্তস্থ।

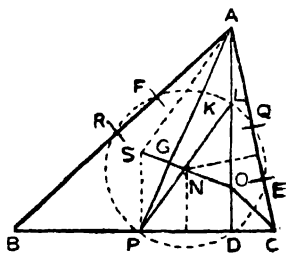
দ্রষ্টব্য : উক্ত বৃত্তকে ত্রিভুজটির **নব-বিন্দু বৃত্ত** (Nine-points circle) এবং উহার কেন্দ্রকে **নব-বিন্দু কেন্দ্র** (Nine-points centre) বলে।

অনু. ১। নব-বিন্দু কেন্দ্র, পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দুর সংযোজক সরল রেখার মধ্যবিন্দু।

[The centre of the Nine points circle is the middle point of the line joining the circum-centre and the orthocentre.]

ABC ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু, S পরিকেন্দ্র এবং N নব-বিন্দু কেন্দ্র।

প্রমাণ করিতে হইবে যে N, SOর মধ্যবিন্দু।

PD রেখার মধ্যবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্ব SOকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

তদ্রূপ, DQ রেখার মধ্যবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্ব SOকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। (২৬শ উপপাদ্য)

অর্থাৎ, ঐ লম্ব দুইটি SOর মধ্যবিন্দুতে ছেদ করিবে।

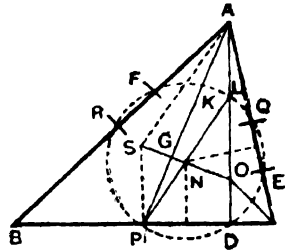
এবং যেহেতু, PD ও EQ নব-বিন্দু বৃত্তের জ্যা,

অতএব উহাদের মধ্যবিন্দু হইতে উহাদের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের ছেদবিন্দুই উহার কেন্দ্র।

স্থতরাং, N, SOর মধ্যবিন্দু।

অনুসিদ্ধান্ত ২। নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

[The diameter of the nine-points circle is half the diameter of the circum-circle.]

নব-বিন্দু বৃত্ত বিষয়ক উপপাদ্য অনুসারে PL নব-বিন্দু বৃত্তের একটি ব্যাস।

অতএব, PLএর মধ্যবিন্দু ঐ বৃত্তের কেন্দ্র। কিন্তু পূর্ব অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে SOর মধ্যবিন্দু নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র।

∴ PL ও SO পরস্পর N বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

এখন, SNP, ONL ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

SN = ON, NP = NL

এবং ∠SNP = বিপ্রতীপ ∠ONL ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

∴ SP = OL = LA,

এবং যেহেতু SP, ALএর সমান্তরাল,

∴ SA = PL

কিন্তু, SA পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং PL নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাস ;

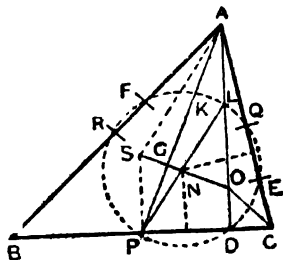
∴ নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেক

অনুসিদ্ধান্ত ৩। ভরকেন্দ্র, লম্ববিন্দু, পরিকেন্দ্র ও নব-বিন্দু কেন্দ্র একরেখীয়।

[The centroid, the orthocentre, the circum-centre and the nine-points centre lie in one straight line.]

AP যোগ কর এবং SOর সমান্তর করিয়া KL টান।

মনে কর, AP, SOকে G বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, AGO ত্রিভুজে, যেহেতু AL = LO এবং LK, OGর সমান্তরাল,

∴ AK = KG.

আবার, PKL ত্রিভুজে, যেহেতু PN = NL এবং LK, OGর সমান্তরাল,

∴ PG = GK.

তাহা হইলে G, APর ত্রিখণ্ডন বিন্দু, অতএব উহা ভরকেন্দ্র।

∴ S, G, N, O একরেখীয়।

অনুশীলনী (৩৮)

১। (ক) ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র যোজক সরল রেখার মধ্য-বিন্দু নব-বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্র।

(খ) ত্রিভুজের নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাস ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসের অর্ধেক।

(গ) ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র, পরিকেন্দ্র, লম্ববিন্দু এবং নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র একরেখীয়।

২। ত্রিভুজের নব-বিন্দুগামী বৃত্ত ও ঐ ত্রিভুজের পাদ-ত্রিভুজের পরিবৃত্ত একই বৃত্ত।

৩। O বিন্দু $\triangle ABC$র লম্ববিন্দু; দেখাও যে BOC, COA, AOB ও মূল ABC ত্রিভুজের প্রত্যেকটির নব-বিন্দুগামী বৃত্ত একই বৃত্ত।

৪। I, I_1, I_2, I_3, যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের অন্তর্লিখিত ও বহির্লিখিত বৃত্তগুলির কেন্দ্র। প্রমাণ কর যে ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত II_1I_2, II_2I_3, II_3I_1, $I_1I_2I_3$ ত্রিভুজের প্রত্যেকটির নব-বিন্দু বৃত্ত হইবে।

৫। O, $\triangle ABC$র লম্ববিন্দু; AD, BCর উপর লম্ব; এবং $AB > AC$; যদি L, X, M যথাক্রমে BC, AO, ACর মধ্যবিন্দু হয়, তবে দেখাও যে,

$$\angle LXD = \angle LMD = \angle C - \angle B.$$

৬। কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু, ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুইটির অন্তর, এবং নব-বিন্দুগামী বৃত্ত দেওয়া থাকিলে, কিরূপে ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিবে, দেখাও।

৭। ত্রিভুজের নব-বিন্দু বৃত্ত ঐ ত্রিভুজের লম্ববিন্দু এবং উহার পরিবৃত্তস্থিত যে-কোন বিন্দুর যোজক রেখার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ।

৮। ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিবৃত্ত নির্দিষ্ট থাকিলে, উহাদের নব-বিন্দু বৃত্তটিও নির্দিষ্ট থাকিবে।

৯। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট আছে। প্রমাণ কর যে, উহার নব-বিন্দু বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

১০। একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক শীর্ষ এবং অতিভুজের মধ্যবিন্দু-সংযোজক রেখার মধ্যবিন্দুটি নববিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্র।

বৃত্তাঙ্কন সম্বন্ধীয় কয়েকটি মন্তব্য

কেন্দ্রের অবস্থান ও ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য জানিতে পারিলে একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারা যায়।

দুইটি নির্দিষ্ট সঞ্চারপথের ছেদবিন্দু হইতে কেন্দ্রের অবস্থান জানা যায়, যেমন দুইটি সরল রেখার ছেদবিন্দু, বা একটি সরল রেখা ও একটি বৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের একটি, ইত্যাদি, অতএব কেন্দ্রবিন্দু নির্ণয়ের জন্য দুইটি স্বতন্ত্র উপাত্ত আবশ্যক।

বৃত্তের উপরিস্থ কোন বিন্দু নির্দিষ্ট থাকিলে কেন্দ্র হইতে ঐ বিন্দুর দূরত্বই ব্যাসার্ধ হইবে। অতএব ব্যাসার্ধ নির্ণয়ের জন্য আর একটি স্বতন্ত্র উপাত্ত আবশ্যক।

সুতরাং কোন বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইলে তিনটি স্বতন্ত্র উপাত্ত আবশ্যক। দৃষ্টান্ত স্বরূপ—

(১) বৃত্তস্থ তিনটি বিন্দু ;

(২) তিনটি স্পর্শক ;

বা (৩) বৃত্তস্থ একটি বিন্দু, একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দু দেওয়া থাকিলে একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

বৃত্তাঙ্কন সুচারুরূপে সম্পন্ন করিতে হইলে নিম্নলিখিত সঞ্চারপথগুলি সম্বন্ধে পরিষ্কার ধারণা থাকা আবশ্যক :—

(১) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত বিন্দুদ্বয়-সংযোজক সরল রেখার মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব।

(২) একটি সরল রেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকারী বৃত্তের কেন্দ্র-বিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত বিন্দু হইতে সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব।

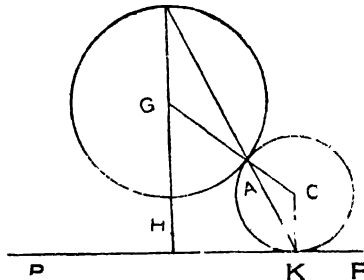
(৩) বৃত্তের কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকারী বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত বৃত্তের নির্দিষ্ট বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ কিংবা ব্যাসার্ধের বর্ধিত অংশ।

(৪) নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট এবং একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার স্পর্শকারী কোন বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত সরল রেখা হইতে ব্যাসার্ধ পরিমাণ দূরে অবস্থিত দুইটি সমান্তরাল সরল রেখা।

(৫) নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের স্পর্শকারী বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত বৃত্তের এককেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত। শেষোক্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ, প্রথমোক্ত ব্যাসার্ধ ও নির্দিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের যোগফল বা বিয়োগফলের সমান।

(৬) দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরল রেখার স্পর্শকারী বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক।

বিবিধ বৃত্তাঙ্কন

১। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে ও একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা PFকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু Kতে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

K বিন্দু দিয়া PFএর উপর KC লম্ব টান। G বিন্দুটি নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র ; G হইতে PFএর উপর বর্ধিত TGH ব্যাসকে লম্ব

করিয়া টান। KT যোগ কর, উহা পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। GA যোগ করিয়া বর্ধিত করিয়া দাও যাহাতে উহা KCকে C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে উদ্দিষ্ট বৃত্তটির কেন্দ্র C এবং ব্যাসার্ধ KC.

[**সঙ্কেত :** $\angle CKA = \angle GTA$, $\because$ TG ও CK ॥

আবার $\angle CAK = \angle GAT$,

কিন্তু, $\angle GTA = \angle GAT$

$\therefore \quad \angle CKA = \angle CAK$,

$\therefore \quad CK = CA$, ইত্যাদি।]

২। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তেকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

K ও T বিন্দু দিয়া যাইবে এবং নির্দিষ্ট বৃত্ত GQHকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

K ও T বিন্দু দিয়া এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, যেন ইহা নির্দিষ্ট বৃত্তটিকে G ও H বিন্দুতে ছেদ করে। HGকে যোগ করিয়া এরূপ ভাবে বর্ধিত কর যেন, উহা বর্ধিত KTকে P বিন্দতে ছেদ করে। P বিন্দু হইতে ⊙ GQHএর দুইটি স্পর্শক PC ও PQ অঙ্কিত কর। এখন

KTC ও KTQ বৃত্ত দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে C ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

[**সঙ্কেত** : $KP.PT = HP.PG = PC^2$.

∴ ⊙ KTC, T ও K বিন্দু দিয়া যাইবে এবং ⊙ GQHকে C বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।]

৩। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহা দুইটি নির্দিষ্ট পরস্পরচ্ছেদী সরল রেখার প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করিবে এবং যাহার ব্যাসার্ধ একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান হইবে।

অঙ্কন : ∠ABCর সমদ্বিখণ্ডক BD অঙ্কিত কর। B বিন্দুতে BAর উপর লম্ব টানিয়া উহা হইতে নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ Kর সমান করিয়া BP কাটিয়া লও। P বিন্দু দিয়া BA রেখার একটি সমান্তরাল রেখা অঙ্কিত কর, উহা BD রেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, Oকে কেন্দ্র করিয়া এবং Kর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

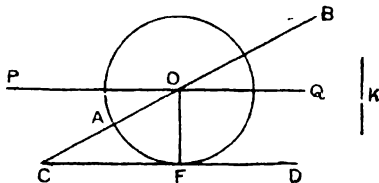
[**সঙ্কেত** : যেহেতু O, ∠ABCর সমদ্বিখণ্ডক BDর উপর অবস্থিত,

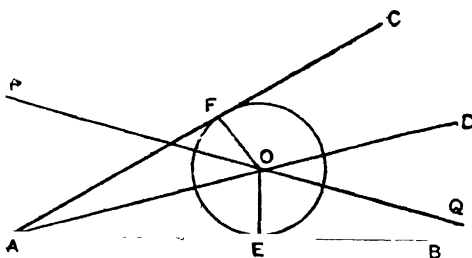
∴ OE = OF.

আবার, OE = PB, কারণ, উহারা আয়তক্ষেত্র OEBPর বিপরীত বাহু।

∴ FO = OE = PB = K.]

৪। কোন নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে যে উহার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট রেখায় থাকিবে এবং উহা অপর একটি নির্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করিবে।

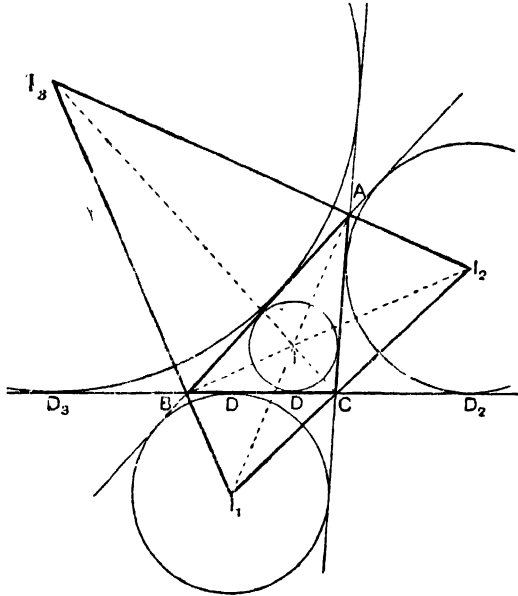
অঙ্কন : CD হইতে নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ r পরিমাণ দূরে CDর সমান্তর করিয়া PQ সরল রেখাটি টান। মনে কর, PQ, ABকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে O উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র। OF, CDর উপর লম্ব করিয়া টান। OF $= r$ হওয়ায় বৃত্তটি CDকে স্পর্শ করিবে।

৫। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরল রেখাকে স্পর্শ করিবে এবং কেন্দ্র অন্য একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর অবস্থিত হইবে, এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

AB ও AC পরস্পর ছেদ করিয়া ∠BAC উৎপন্ন করিয়াছে। ∠BACর সমদ্বিখণ্ডক AD টান। মনে কর, উহা আর একটি নির্দিষ্ট রেখা PQকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। O হইতে ABর উপর OE লম্ব টান।

তাহা হইলে উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O হইবে, এবং ব্যাসার্ধ OE.

দ্রষ্টব্য : যদি PQ, ADর সমান্তরাল হইয়া যায় তাহা হইলে বৃত্তাঙ্কন হইবে না।

ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত ও বহির্বৃত্ত

ABC ত্রিভুজের, যদি I অন্তঃকেন্দ্র এবং I_1, I_2, I_3 তিনটি বহিঃকেন্দ্র হয়, তাহা হইলে—

১। প্রমাণ কর যে (১) A, I, I_1 ; (২) B, I, I_2 এবং (৩) C, I, I_3 একরেখীয়।

২। প্রমাণ কর যে, (১) I_3, A, I_2 ; (২) I_2, C, I_1 এবং (৩) I_1, B, I_3 একরেখীয়।

৩। প্রমাণ কর যে, I_1A, I_2B, I_3C যথাক্রমে I_2I_3, I_3I_1 এবং I_1I_2র সহিত সমকোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

৪। প্রমাণ কর যে ABC ত্রিভুজ, $I_1I_2I_3$ ত্রিভুজের পাদ-ত্রিভুজ।

অনুশীলনী (৩৯)

[বিবিধ]

১। একটি বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পর ছেদ করিলে একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান হইবে।

২। কোন বৃত্তে, সমবিন্দু জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুগুলি সমবৃত্ত।

৩। একটি সামান্তরিক ABCDর AC, BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিল; প্রমাণ কর যে AOB, COD ত্রিভুজ দুইটির পরিবৃত্ত পরস্পর O বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

৪। ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুগুলির উপর যথাক্রমে যে-কোন তিনটি বিন্দু D, E ও F লওয়া হইল। প্রমাণ কর যে EAF, FBD ও DCF ত্রিভুজ তিনটির পরিবৃত্তগুলি একটি সাধারণ বিন্দু দিয়া যায়।

৫। একই ভূমির উপর এবং তাহার একই পার্শ্বে অবস্থিত ত্রিভুজ সকলের শিরঃকোণ সমুদয় যদি পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ শিরঃকোণ সমুদয়ের সমদ্বিখণ্ডক-সমূহ সমবিন্দু হইবে।

৬। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তের মধ্যে একটি অপরটির কেন্দ্র দিয়া গিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে ছেদবিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত দ্বিতীয় বৃত্তটির স্পর্শকদ্বয় প্রথমটির পরিধির উপর কোন এক বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

৭। বৃত্তস্থ কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু বর্ধিত হইয়া L বিন্দুতে এবং অপর জোড়া বর্ধিত হইয়া M বিন্দুতে পরস্পর যদি ছেদ করে, এবং এই প্রকারে সৃষ্ট দুইটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত দুইটির ছেদবিন্দু দুইটির একটি যদি হয় R, তবে প্রমাণ কর, L, M, R বিন্দুত্রয় সমরেখ।

৮। △ABCর তিনটি লম্ব, AD, BE, CF. প্রমাণ করিতে হইবে যে D হইতে AB, BE, CFএর উপর লম্ব সকলের পাদবিন্দুগুলি সমরেখ।

৯। AB, AC, AD কোন বৃত্তের কোন তিনটি জ্যা। ঐ জ্যা তিনটিকে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্তসমূহ পুনরায় তিনটি বিন্দুতে ছেদ করে। আর ঐ তিনটি বিন্দু সমরেখ।

১০। সমান সমান দুইটি বৃত্ত A এবং Bতে পরস্পর ছেদ করিল; Aকে কেন্দ্র করিয়া, এবং AB হইতে কম দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি তৃতীয় বৃত্ত টানা হইল এবং উহা, ABর একই পার্শ্বে, ঐ সমান বৃত্তদ্বয়কে C ও Dতে ছেদ করিল। এখন প্রমাণ করিতে হইবে যে, B, C, D সমরেখ

১১। যে সকল ত্রিভুজের ভূমি পরস্পর সমান এবং যাহাদের শিরঃকোণগুলি পরস্পর সমান অথবা সম্পূরক, তাহাদের পরিবৃত্ত সকলও পরস্পর সমান হইবে।

১২। কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু এবং যে-কোন দুইটি শীর্ষগামী বৃত্ত ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমান হয়।

১৩। কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের উপর বহিঃস্থভাবে তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইল। প্রমাণ কর যে এই ত্রিভুজ সকলের পরিবৃত্তগুলি একটি সাধারণ বিন্দু দিয়া যায়।

১৪। কোন নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ PQRSএর কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে OPQ, OQR, ORS, OSP এই ত্রিভুজগুলির পরিবৃত্ত-সমূহের কেন্দ্র সকল এক সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু হইয়াছে।

১৫। ABC △এর পরিকেন্দ্র S; S হইতে BCর উপর এক লম্ব টানা হইল; উহা পরিবৃত্তের সহিত M ও N বিন্দুতে মিলিত হইল (BCর যে পার্শ্বে A, সেই পার্শ্বেই N বিন্দু লওয়া হইয়াছে); দেখাও যে AM ও AN, A স্থিত কোণটির যথাক্রমে অন্তর্দ্বিখণ্ডক

ও বহির্দ্বিগুক। অধিকন্তু L যদি ABC △এর অন্তঃকেন্দ্র হইয়া থাকে, তবে দেখাও যে M, BLC △এর পরিকেন্দ্র।

১৬। AX, AY দুইটি স্থির সরল রেখা। ঐ দুই সরল রেখাতে কোন নির্দিষ্ট রেখা BCর প্রান্তদ্বয় অবস্থিত আছে। দেখাইতে হইবে যে BCর যে-কোন অবস্থানই হউক না কেন, △ABCর পরিব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট থাকে। আরও দেখাও যে BCর বিভিন্ন অবস্থানে △ABCর পরিকেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি বৃত্তপরিধি।

১৭। O, △ABCর লম্ববিন্দু। P, Q, R যথাক্রমে △BOC, △COA, △AOBর পরিকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে,

(১) O, △PQOর পরিকেন্দ্র;

(২) OPCQ, OQAR, ORBP চতুর্ভুজগুলির প্রত্যেকটিই একটি রম্বস্।

এবং (৩) △ABC ও △POQ সর্বসম।

১৮। H, ABC △এর লম্ববিন্দু; দেখাও যে ∠BHC ও ∠BAC পরস্পর সম্পূরক।

১৯। ABC △এর ∠Aএর অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক যথাক্রমে পরিবৃত্তের সহিত D ও D′ বিন্দুতে এবং ভূমির সহিত যথাক্রমে E ও E′ বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ কর যে, D, EE′D △এর লম্ববিন্দু।

২০। H, যদি ABC △এর লম্ববিন্দু হয় তবে H, A, B, C এই চারিটি বিন্দুর যে-কোন একটি অপর তিনটি বিন্দুগামী ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইবে।

২১। ABC △এর পরিকেন্দ্র S হইতে বাহুগুলির উপর SA′ SB′ SC′ এই তিনটি লম্ব টানা হইল। লম্বগুলি যথাক্রমে L, M, N পর্যন্ত এরূপ ভাবে বর্ধিত করা হইল যে SA′ = A′L, SB′ = B′M

ও $SC' = C'N$ হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে S, LMN △এর লম্ববিন্দু। এখানে প্রমাণিত কর যে △ABC ও △LMNএর একই নব-বিন্দু বৃত্ত হইয়াছে।

২২। যে সকল ত্রিভুজের একই লম্ববিন্দু এবং একই পরিবৃত্ত, তাহাদের নব-বিন্দু বৃত্তও একই হইয়া থাকে।

২৩। কোন ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র, পরিকেন্দ্র, এবং শীর্ষবিন্দু নির্দিষ্ট থাকিলে, কিরূপে ত্রিভুজটি অঙ্কন করিবে তাহা দেখাও।

২৪। ABC △এর ∠C এক সমকোণ। C হইতে অতিভুজের উপর CD এক লম্ব টানা হইলে, প্রমাণ কর যে,

(১) $AD.DB = CD^2$;

(২) $AB.AD = AC^2$.

২৫। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিয়াছে; তাহাদের সাধারণ জ্যার উপর কোন বিন্দু X হইতে AB একটি জ্যা একটি বৃত্তে এবং CD অপর একটি জ্যা অপর বৃত্তে টানা হইল। দেখাইতে হইবে যে,

$$AX.XB = CX.XD.$$

২৬। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিয়াছে। তাহাদের সাধারণ জ্যার বর্ধিতাংশ হইতে যে সকল স্পর্শক টানা যায় তাহারা সমান।

২৭। কোন বৃত্তের চাপের জ্যা $= 2c$, ঐ চাপের উচ্চতা $= h$ এবং ব্যাসার্ধ $= r$. প্রমাণ কর

$$h(2r - h) = c^2.$$

(৬০শ উপপাদ্য প্রয়োগ কর)

২৮। কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে তাহার ন্যূনতম দূরত্ব $= d$, এবং ঐ বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকের দূরত্ব $= t$, প্রমাণ কর,

$$d(d + 2r) = t^2.$$

(২৬শ উপপাদ্য প্রয়োগ কর)

২৯। কোন r পরিমাণ ব্যাসার্ধযুক্ত চাপের উচ্চতা $= h$ এবং ঐ চাপের অর্ধেক পরিমাণের জ্যা $= b$; প্রমাণ কর যে,

$$b = 2rh.$$

৩০। কোন বহিঃস্থ বিন্দু P হইতে কোন বৃত্তে PCD একটি ছেদক টানা হইল, এবং PM কোন ব্যাস ABর উপর লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে,

$$PM^2 = PC.\ PD + AM.\ MB.$$

৩১। দুইটি বৃত্ত B ও C পরস্পর ছেদ করিল ; AE ও DF দুইটি সাধারণ স্পর্শক টানা হইল। যদি সাধারণ জ্যাটি বর্ধিত করিয়া স্পর্শক দুইটিকে G ও Hএ মিলিত করা হয়, তবে দেখাও যে,

$$GH^2 = AE^2 + BC^2.$$

৩২। AB ব্যাসার্ধের উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। এবং AC, BD যে-কোন দুইটি জ্যা টানা হইল এবং তাহারা P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল, প্রমাণিত কর যে,

$$AB^2 = AC.\ AP + BD.\ BP.$$

৩৩। কোন বৃত্তে, ABCDE সুষম পঞ্চভুজটি অন্তর্লিখিত ;- AC ও BD, Oতে পরস্পর ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে,

(১) $AO = DO$;

(২) $BC^2 = AC.CO.$

৩৪। কোন বৃত্তের AOB, COD দুইটি জ্যা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে,

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = (\text{ব্যাস})^2$$

৩৫। ABCDE একটি সুষম পঞ্চভুজ; AC, BE পরস্পর H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও যে,

(১) $AB = CH = EH$;

(২) $AC = AB + BH$;

এবং (৩) $HC^2 = AC.AH$.

৩৬। কোন বৃত্তে ABC সমবাহু ত্রিভুজটি অন্তর্লিখিত হইয়াছে। O ঐ বৃত্তের কেন্দ্র। BOকে বর্ধিত করিয়া পরিধির সহিত D বিন্দুতে মিলিত করা হইল। প্রমাণ কর যে,

(১) AD চাপ = সমগ্র পরিধির $\frac{1}{6}$.

এই ফল হইতে প্রমাণ কর,

(২) $AD = AO$

এবং (৩) $AB^2 = 3OA^2$.

৩৭। AX, XY, দুইটি স্থির রেখা; ঐ সরল রেখাদ্বয়ে কোন নির্দিষ্ট রেখা BCর প্রান্ত বিন্দুদ্বয় অবস্থিত আছে। প্রমাণিত কর যে,

BCর সকল অবস্থানেই BC হইতে পরিকেন্দ্রের দূরত্ব এক থাকে।

এই ফল হইতে প্রমাণ কর, BCর বিভিন্ন অবস্থানে △ABCর লম্ববিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্তের পরিধি।

৩৮। ত্রিভুজের একটি বাহু, অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধদ্বয় দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৩৯। ত্রিভুজের একটি কোণ ও উহার বিপরীত বাহু এবং অন্য বাহু দুইটির যোগফল দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৪০। বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোন ষড়্ভুজের যে-কোন তিনটি একান্তর কোণের যোগফল চারি সমকোণের সমান হইবে।

৪১। বৃত্তে অন্তর্লিখিত সদৃশকোণ বহুভুজের একান্তর বাহুগুলি পরস্পর সমান হইবে।

এই ফল হইতে প্রমাণ কর যে, বহুভুজটি পঞ্চভুজ হইলে, উহা সমবাহু হইবে।

৪২। যদি কোন চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহুর যোগফল অন্য জোড়া বিপরীত বাহুর সমান হয়, তবে দেখাও যে একটি বৃত্ত ঐ চতুর্ভুজের অন্তর্লিখিত হইতে পারিবে।

৪৩। একটি চতুর্ভুজে একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত আছে। প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হইলে উহা একটি রম্বস্।

৪৪। বৃত্তে অন্তর্লিখিত বৃহত্তম চতুর্ভুজ একটি বর্গক্ষেত্র।

৪৫। কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়কে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে এরূপ তিনটি বৃত্ত অঙ্কন কর যেন উহাদের প্রত্যেকটি অবশিষ্ট দুইটিকে স্পর্শ করে।

৪৬। একই জ্যার উপর এবং উহার একই পার্শ্বে যদি দুইটি সদৃশ বৃত্তাংশ অবস্থিত হয়, তবে তাহারা পরস্পর সমাপতিত না হইয়া পারে না।

৪৭। সমান সমান জ্যার উপর যে সকল সদৃশ বৃত্তাংশ অবস্থিত থাকে, তাহারা পরস্পর সমান হইবে।

৪৮। কোন ত্রিভুজের শিঃরকোণ এবং ভূমি নির্দিষ্ট আছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে উহার নব-বিন্দু বৃত্ত এরূপ একটি স্থির বৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে যাহার ব্যাসার্ধ উহার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হইয়াছে।

৪৯। বৃত্তপরিধির চতুর্থাংশকে ত্রিখণ্ডিত কর।

৫০। দুইটি বৃত্ত নির্দিষ্ট আছে। এরূপ একটি সরল রেখা টান যাহা উহাদের একটিকে স্পর্শ করিবে এবং অপরটিকে এরূপে ছেদ করিবে যে ছেদিত জ্যা কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান হইবে

কখন ইহা সম্ভব হইবে না?

UNIVERSITY MATRICULATION PAPERS

COMPULSORY PAPER

CALCUTTA

928

1. *Either*, (i) If one angle of a triangle be greater than another, prove that the side opposite to the greater angle shall be greater than the side opposite to the less.

(ii) Hence deduce that the hypotenuse is the greatest side in a right-angled triangle.

Or, (i) Prove that the three interior angles of a triangle are together equal to two right angles.

(ii) If one angle of a triangle is equal to the sum of the other two, the triangle is right-angled.

2. (i) In equal circles, prove that the arcs which subtend equal angles whether at the centres or circumferences shall be equal.

(ii) Two equal circles intersect at A and B; and through A any straight line PAQ is drawn terminated by the circumferences. Show that BP = BQ.

3. Prove that the angle at the centre of a circle is double the angle at the circumference standing on the same arc.

1929

1. *Either*, (i) Prove that if two straight lines intersect, the vertically opposite angles are equal.

(ii) Two straight line AB and CD intersect at E. If the bisector of the angle AEC be produced, prove that it will bisect the angle BED.

Or, (i) Prove that two triangles are equal in every respect, if two angles and the adjacent side of one triangle are respectively equal to two angles and the adjacent side of the other.

(ii) The triangle ABC has the angles at B and C equal. Show that the bisectors of these equal angles terminated by the opposite sides are equal.

2. (i) Prove that if two tangents are drawn to a circle from an external point, they are equal.

(ii) If the circumference of a circle is divided into three equal arcs, the tangents drawn to the circle at the points of section form an equilateral triangle.

3. Draw a tangent to a given circle from an external point. (Traces of construction must be given, but no justification is required.)

1930

1. *Either*, (i) Prove that the three angles of a triangle are together equal to two right angles.

(ii) Find in *degrees* each angle of a regular polygon of five sides. Give reasons for your answer.

Or, (i) Prove that the area of a triangle is half the area of a parallelogram on the same base and of the same altitude.

(ii) ABCD is any parallelogram and O is any point within it. Show that the sum of the areas of the triangles AOB and COD is equal to half the area of the parallelogram.

2. *Either*, (i) Establish geometrically the algebraical formula $a^2-b^2 =(a+b)(a-b)$.

(ii) In a triangle ABC, AD is the perpendicular drawn to the base BC and O is the middle point of BC. Prove that the difference $AB^2 \sim AC^2 = 2\ BC.OD$.

Or, (i) Prove that the tangent at any point of a circle is at right angles to the radius drawn through the point.

(ii) The radius of a given circle is 1·5 inches. Prove that all points from which the tangents drawn to the circle are of constant length 2 inches, lie on a circle. Draw a diagram as accurately as you can.

3. Construct a triangle whose base will be 6 centimetres and the other two sides 3 and 5 centimetres respectively. Measure as accurately as possible the altitude of the triangle.

[*Traces and statement of construction are required.*]

1931

1. *Either*, (i) If two angles of one triangle are respectively equal to two angles of another, and the side adjacent to the angles in one equal to the side adjacent to the equal angles in the other, prove that the two triangles are equal in all respects.

Or, (i) Prove that any two sides of a triangle are together greater than the third side.

(ii) Prove that the difference of any two sides of a triangle is less than the third side.

2. *Either*, (i) Prove the geometrical proposition corresponding to the algebraical formula $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$.

(ii) Prove that the square on a straight line is equal to four times the square on half the line.

Or, (i) Draw two tangents to a circle from an external point.

(ii) A quadrilateral is described touching a circle. Prove that the sum of any pair of opposite sides is equal to the sum of the other pair.

3. Construct a triangle, given the base, one side and the area.

1932

1. *Either*, (i) If one side of a triangle is produced prove that the exterior angle is greater than either of the interior opposite angles.

(ii) Show that it is impossible to draw three equal straight lines from a given point to a given straight line.

Or, (i) Prove that, if a straight line cuts two parallel straight lines, the corresponding angles are equal.

(ii) Prove that, it the three sides of one triangle are parallel to the three sides of another triangle, the corresponding angles are equal.

2. *Either*, (i) If a straight line drawn through the centre of a circle bisects a chord which does not pass through the centre, prove that it cuts the chord at right angles.

(ii) Show how to construct a circle of given radius to pass through two given points. When is this construction impossible?

Or, (i) Prove that the tangent at any point of a circle and the radius through the point are perpendicular to one another.

(ii) Show how to draw a tangent to a given circle paralle to a given straight line. How many such tangents are possible?

3. (i) Construct a square on a given finite straight line. (Give only the traces of *all* your constructions, using a hard pencil, a straight ruler, and a pencil-compass only.)

(ii) Divide the area of a given square into parts from which two equal squares can be made up.

1933

1. *Either*, (i) Show that in a right-angled triangle the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the other two sides.

(ii) Prove that in an equilateral triangle four times the square on the perpendicular drawn from a vertex on the opposite side is equal to three times the square on any side.

Or, (i) Show that in an obtuse-angled triangle the square on the side subtending the obtuse angle is greater than the sum of the squares on the other two sides by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

(ii) Prove that a triangle whose sides are 2, 3 and 4 inches is an obtuse-angled triangle.

2. *Either*, (i) Show that equal chords of a circle are equidistant from the centre.

(ii) Find the locus of the mid-points of chords of constant length in a circle.

Or, (i) Show that there is only one circle which passes through three given points not in a straight line.

(ii) Prove that two different circles cannot cut each other at more than two points.

3. (i) Describe a parallelogram equal in area to a given triangle and having one of its angles equal to a given angle. (Traces only are required.)

(ii) Construct a rhombus equal in area to a given rectangle and having a side equal to a side of the rectangle. (Traces only are required)

1934

1. *Either* (i) If two sides of a triangle are unequal, prove that the greatest side has the greater angle opposite to it.

(ii) Show that the difference of any two sides of a triangle is less than the third side.

Or, (i) Show that the triangles on equal bases and of the same altitude are equal in area.

(ii) Show that the straight line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side.

2. (i) Show that the angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of the circumference.

(ii) L is any point on the arc PM of a circle. The angles LPM and LMP are bisected by straight lines which intersect at O. Find the locus of the point O.

3. *Either*, (i) Draw a triangle equal in area to a given quadrilateral.

(ii) Bisect a quadrilateral by a straight line drawn through an angular point.

Or, (i) Construct a quadrilateral, given the lengths of the four sides and one angle. (Traces only are required.)

(ii) Bisect a triangle by a straight line drawn through a given point in one of its sides. (Traces only are required.)

1935

1. *Either*, (i) If the three sides of one triangle are respectively equal to the three sides of another, show that the two triangles are equal in all respects.

(ii) Show that the diagonals of a rhombus bisect one another at right angles.

Or. (i) Show that equal chords of a circle are equidistant from the centre.

(ii) Through a given point within a circle draw the least possible chord.

2. *Either*, (i) In an obtuse-angled triangle show that the square on the side opposite the obtuse angle is greater than the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle by twice the rectangle contained by either of those sides and the projection of the other upon it.

(ii) In any triangle show that the sum of the squares on two sides is equal to twice the square on half the third side together with twice the square on the median which bisects the third side.

Or, (i) Show that if chords of a circle cut one another (inside the circle) the rectangle contained by he segments of one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.

(ii) ABC is a triangle right-angled at C; from C a perpendicular CD is drawn to the hypotenuse; show that the square on CD is equal to the rectangle AD. BD

3. (i) Describe a parallelogram that shall be equal to a given triangle and have one of its angles equal to a given angle.

(ii) Describe a rhombus equal to a given parallelogram and standing on the same base. When does the construction fail ?

1936

1. *Either,* (i) Show that the three angles of a triangle are together equal to two right angles.

(ii) Show that the angle contained by the bisectors of two adjacent angles of a quadrilateral is equal to half the sum of the remaining angles.

Or, (i) Show that triangles on the same base and between the same parallels are equal in area.

(ii) Show that the straight line which joins the middle points of the oblique sides of a trapezium is parallel to each of the parallel sides.

2. *Either,* (i) Show that the opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are together equal to two right angles.

(ii) If O is the orthocentre of the triangle ABC, show that the angles BOC, BAC are supplementary.

Or, Show that the angles made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.

(ii) Two circles intersect at A and B; and through P, any point on the circumference of one of them, straight lines PAC, PBD are drawn to cut the other circle at C and D. Show that CD is parallel to the tangent at P.

3. (i) Construct a triangle having given two sides and an angle opposite to one of them. Explain the case where you get two solutions.

(ii) Trisect a triangle by straight lines drawn from a given point on one of its sides. (Traces only are required.)

1937

1. *Either,* (i) If two triangles have two angles of one equal to two angles of the other, each to each, and one side of the first equal to the corresponding side of the other, show that the triangles are equal in all respects.

(ii) If the bisector of the vertical angle of a triangle also bisects the base, show that the triangle is isosceles.

Or, (i) Show that chords of a circle which are equidistant from the centre are equal.

(ii) PQ is a fixed chord in a circle and AB is any diameter. Show that the sum of the perpendiculars let fall from A and B on PQ is constant if AB does not interest PQ inside the circle.

2. *Either,* (i) In every triangle the square on the side subtending an acute angle is equal to the sum of the squares on the sides containing that angle diminished by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it. Establish.

(ii) Show that three times the sum of the squares on the sides of a triangle is equal to four times the sum of the squares on the medians.

Or, (i) If two chords of a circle cut at a point within it, the rectangles contained by the segments are equal. Establish.

(ii) A semi-circle is described on AB as diameter, and any two chords AC, BD are drawn intersecting at P. Show that

$$AB^2 = AC.AP + BD.BP.$$

3. (i) Bisect a quadrilateral by a straight line drawn through an angular point. (State your construction and give a theoretical proof).

(ii) Construct a triangle having the base angles equal to two given angles and the perpendicular from the vertex on the base equal to a given line. (Traces only are required).

1938

1. *Either,* (i) If two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each, and the included angles equal, show that the triangles are equal in all respects.

(ii) *ABC, DBC* are two isosceles triangles described on the same base *BC* but on opposite sides of it. *AD* meets *BC* in *E.* Prove that $BE = EC$.

Or, (iii) Show that the locus of a point which is equidistant from two fixed points is the perpendicular bisector of the straight line joining the two fixed points.

(iv) Straight lines are drawn from a fixed point to a given straight line. Find the locus of their middle points.

2. *Either,* (i) Show that the angle at the centre of a circle is double of the angle at the circumference standing on the same arc.

(ii) If two chords *AB* and *CD* of a circle intersect at a point *E* inside the circle, show that the angles subtended by *AC* and *BD* at the centre are together double of the angle *AEC.*

Or, (iii) Prove that in an obtuse-angled triangle the square on the side subtending the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle, together with twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side on it.

(iv) If *DE* is drawn parallel to the base *BC* of an isosceles triangle *ABC,* prove that the difference of the squares on *BE* and *CE* is equal to the rectangle contained by *BC* and *DE.*

3. (i) Construct a triangle having given two angles and a side opposite to one of them. (State your construction and give a theoretical proof.)

(ii) Construct a triangle having given the perimeter and two angles. (Traces only are required.)

DACCA

1934

1. Prove that if a straight line cuts two parallel lines, it makes (i) the alternate angles equal to one another, (ii) the exterior angle equal to the interior opposite angle on the same side of the cutting line. Hence deduce : (i) the exterior angle of a triangle is equal to the sum of the two interior opposite angles of the triangle ; (ii) three angles of a triangle are together equal to two right angles.

Or, Prove that the angle at the centre of a circle is double of an angle at the circumference standing on the same arc. Hence deduce that (i) angle in the same segment of a circle are equal, (ii) the angle in a semi-circle is a right angle.

2. (i) Prove that any two sides of a triangle are together greater than the third side.

(ii) Prove that the perimeter of a triangle is greater than the sum of its medians.

Or, (i) If two circles touch one another, the centres of the circles and their point of contact are collinear.

(ii) Find the locus of the centres of circles which touch two concentric circles.

3. (i) Prove that the straight line which joins the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and divides the triangle in the ratio of 3 : 1.

(ii) Prove that the parallelogram obtained by joining the middle points of the sides of a quadrilateral is equal to half of the quadrilateral.

Or, Enunciate and prove the geometrical theorem corresponding to the algebraical identity $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$, and hence prove that in any triangle the square on the side subtending an acute angle is equal to the sum of the squares on the sides containing that angle diminished by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

4. Construct a triangle having given two sides and an angle opposite to one of them.

Discuss the cases when there will be : (i) one solution, (ii) two solutions, and (iii) no solution.

[*Traces of construction should be left in each case.*]

Or, Reduce a quadrilateral to an equivalent triangle, and bisect it by a straight line through an angular point.

1935

1. Prove that the three angles of a triangle are together equal to two right angles. Hence deduce that all the interior angles of any rectilineal figure, together with four right angles, are equal to twice as many right angles as the figure has sides.

Or, (*a*) Prove that triangles on the same or equal bases and between the same parallels are equal in area.

(*b*) Prove that a parallelogram is divided by its diagonals into four triangles of equal area.

2. (*a*) If two triangles have two angles of one equal to two angles of the other, each to each, and any side of the first equal to the corresponding side of the other, the triangles are equal in all respects.

(*b*) Prove that any point on the bisector of an angle is equidistant from the arms of the angle.

Or, (*a*) Prove that the straight line which joins the middle points of two sides of a triangle is parallel to and half of the third side.

(*b*) Prove that the straight lines which join the middle points of the opposite sides of a quadrilateral, bisect one another.

3. (*a*) Prove that equal chords of a circle are equidistant from the centre and conversely, chords which are equidistant from the centre are equal.

(*b*) Find the locus of the middle points of equal chords of a circle.

Or, (*a*) If two circles touch one another, the centres and the point of contact are in one straight line.

(*b*) A and B are the centres of two fixed circles which touch internally. If P is the centre of any circle which touches the larger circle internally and the smaller externally, prove that AP+BP is constant.

4. Give the construction for drawing a rectangle equal in area to a given rectilineal figure and reducing it to a square of equal area.

Or, (*a*) Draw a triangle equal in area to a given quadrilateral.

(*b*) A quadrilateral field ABCD has the following measurements: AB=450 metres, BC=380 metres, CD=330 metres, AD=390 metres and the diagonal AC=660 metres. Draw a plan (scale 1 c. m =50 metres). Reduce your plan to an equivalent triangle and measure its base and altitude. Hence estimate the area of the field.